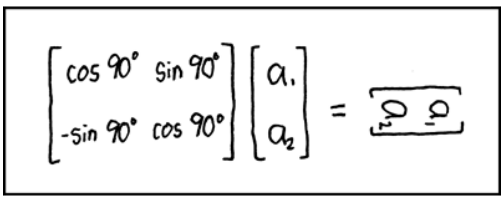
Espaces préhilbertiens réels

« Il n'y a pas de plat suffisamment bon, pour ne pas être encore meilleur avec du confit de canard. » – proverbe culinaire.

Table des matières



XKCD 184 – *In fact, draw all your rotational matrices sideways. Your professors will love it ! And then they'll go home and shrink.*

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels sont **réels**. Il existe une version complexe des notions abordées (utiles par exemple pour traiter les séries de Fourier – RIP) mais qui sont maintenant hors programme.

1 Produits scalaires, utilisation de l'orthogonalité

1.1 Produits scalaires ; premiers exemples

DÉFINITION 1 — *Produit scalaire ; espaces préhilbertiens réels et euclidiens.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

— Un **produit scalaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

  — φ est *symétrique* :

$$\forall x, y \in E, \qquad \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$$

  — φ est *bilinéaire* : pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \in E \mapsto \varphi(x_0, y)$ est linéaire (linéarité à droite de φ), et pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \in E \mapsto \varphi(x, y_0)$ est linéaire (linéarité à gauche).

  — φ est *positive* : $\varphi(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

  — φ est *définie* : $x = 0$ est le seul vecteur tel que $\varphi(x, x) = 0$.

— Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est déclaré **préhilbertien**.

— Un espace préhilbertien est dit **euclidien** quand il est de dimension finie.

REMARQUES :

— En pratique, pour montrer la bilinéarité d'une application symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Le plus souvent, on se contentera d'ailleurs d'un « φ est clairement bilinéaire », éventuellement agrémenté d'un « du fait de la linéarité de l'intégration, de la dérivation, de la somme... ». Agiter les bras finira souvent de convaincre le contradicteur. Ce dernier, tel un chien truffier, détectera le doute ou le bluff dans l'œil/la voix de son interlocuteur, le poussant ainsi à demander quelques précisions.

— Toujours montrer le caractère positif avant le caractère défini, même si on trouve souvent l'expression « défini, positif ».

— Comment prouver le caractère défini ? On suppose que $\varphi(x, x) = 0$, et on montre que $x = 0$. AUCUNE équivalence à écrire, bien entendu...

— Les produits scalaires sont souvent notés de façon infixe (comme une loi de composition interne) : $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$ à la place de $\varphi(x, y)$. On trouvera également les notations $\langle x|y\rangle$, ou $(x|y)$, etc.

EXEMPLES :

- Sur $E = \mathbb{R}^n$:

  — Le produit scalaire dit *canonique* est donné par $\varphi(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$; on remarque que si on note X et Y les vecteurs colonnes associés, alors $\varphi(x, y) = X^{\mathrm{T}} Y$.

  — Sur $\mathbb{R}^2$, on peut prendre $\varphi(x, y) = x_1 y_2 + 2x_2 y_2$, ou (moins clair)

$$\varphi(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 = X^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

  — D'une manière générale, on verra que si A est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+^*$, alors $(X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}} AY$ constitue un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (pudiquement confondu avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

- Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$; il est donc naturel de prendre comme produit scalaire : $\langle A|B\rangle = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$. Le lecteur vérifiera sans mal qu'on a :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} B),$$

  formule parfois efficace pour accélérer certains calculs ou certaines preuves.

- Sur $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$) :

  — $(P, Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_k$ constitue un produit scalaire (la somme va jusqu'au maximum des deux degrés ; on écrit parfois $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k q_k$, en se souvenant qu'il s'agit d'une somme **finie** et non d'une somme de série).

— On trouve aussi $(P,Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)dt$ lorsque $a < b$.

— Si on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$, $(P,Q) \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ constitue un produit scalaire ; mais il n'est plus défini si on se place sur $\mathbb{R}[X]$; on peut alors réparer le problème avec quelque chose comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$.

- Sur $E = \mathcal{C}([a,b])$:

— Le produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ est l'un des plus fréquents sur ce type d'espace.

— Le produit scalaire précédent se généralise à ceux de la forme

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b fg\rho,$$

où ρ est une application continue sur $[a,b]$, à valeurs positives, et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points (exemple sur $[0,1]$: $t \mapsto \sin(\pi t)$).

1.2 Cauchy-Schwarz ; normes euclidiennes

Voici enfin la version générale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

Théorème 1 — *Inégalité de Cauchy Schwarz*

Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
— Si $x, y \in E$, alors $|\varphi(x,y)| \leqslant \varphi(x,x)^{1/2}\varphi(y,y)^{1/2}$.
— Si de plus φ est définie, alors il y a égalité si et seulement si x et y sont liés (colinéaires).

Preuve : Comme on l'a déjà vu dans quatre cas particuliers (sommes finies, sommes de séries, intégrales, espérances), il suffit de considérer l'application $\lambda \mapsto \langle \lambda x + y|\lambda x + y\rangle$... ■

Exercice 1. *Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Montrer :*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2\sqrt{k}.$$

La géométrie des classes antérieures relie le produit scalaire à la notion usuelle de norme dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, via la relation :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

On va définir de façon générale une norme sur un espace vectoriel. Une telle norme n'est pas forcément reliée à un produit scalaire, mais tout produit scalaire fournit de façon naturelle une norme.

Définition 2 — *Norme*

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
— $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ (*homogénéité*).
— $N(x) = 0$ (si et) seulement si $x = 0$ (*séparation* ; le sens « si $x = 0$ alors $N(x) = 0$ » est conséquence de l'homogénéité).
— Pour tout $(x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

Proposition 1 — Normes euclidiennes

Si φ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.

Preuve : La seule chose non triviale est l'inégalité triangulaire (« inégalité de Minkowsky » dans le cas d'un produit scalaire). Là encore, on l'a déjà vue dans le passé. On prouvera même qu'il y a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont **positivement liés**.
On commence par noter que $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ si et seulement si $N(x+y)^2 \leqslant (N(x) + N(y))^2$ (pourquoi, au fait ?). Ensuite, après simplifications, on est ramené à $\langle x|y\rangle \leqslant \|x\|\,\|y\|$, qui doit être une *conséquence* de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (mais n'est pas équivalente, bien entendu...). ■

Il faut savoir passer des produits scalaires aux normes (c'est la définition !), mais aussi faire le travail dans l'autre sens !

Proposition 2 — Polarisation

Si $x, y \in E$, alors :

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Preuve : Pffff... Le point essentiel est que vous soyez capable de *retrouver* une telle formule, et pas dans votre mémoire ou sur la copie du voisin. ■

Remarque : Si $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire, on parle de norme euclidienne. Question naturelle : existe-t-il des normes qui ne sont pas euclidiennes ? Réponse : OUI ! Question : par exemple ? Réponse : patience !

1.3 Orthogonalité

Commençons par un scoop sidérant :

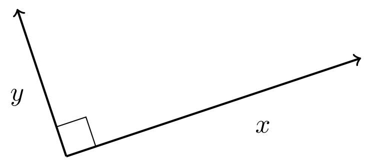


Figure 1 – On peut avoir $\langle x|y\rangle = 0$ sans que ni x ni y ne soit nul !

Inutile donc de proférer des « $\langle x|y\rangle = 0$, or $x \neq 0$, donc ... ».

Définition 3 — *Vecteurs et espaces orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien.
- Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\langle x|y\rangle = 0$; on note alors $x \perp y$.
- Deux sous-espaces F_1 et F_2 sont dits orthogonaux lorsque $\langle x|y\rangle = 0$ pour tout $(x, y) \in F_1 \times F_2$; on note alors $F_1 \perp F_2$.
- Une famille de vecteurs $(y_1, \ldots, y_k)$ est dite orthogonale (abréviation : $\perp$) lorsque pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\langle y_i|y_j\rangle = 0$. Dans le cas où les y_i sont de norme 1, la famille est dite **orthonormée** (abréviation : $\|\perp\|$).

Proposition 3 — Les yeux bandés

Dans un espace préhilbertien :
- Si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** (en particulier si la famille est orthonormée), alors elle est libre.
- Si $F_1 = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_p)$, alors $F_1 \perp F_2$ si et seulement si $x_i \perp y_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, p]\!]$.
- Si $F_1 \perp F_2$, alors $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Remarques :
- La CNS pour avoir $F_1 \perp F_2$ n'est pas ÉQUIVALENTE à l'orthogonalité de la famille $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_p)$.
- Retenir ce qui se passe lorsqu'on « scalairise » une combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux avec l'un d'eux : il s'agit d'une étape importante dans de nombreux raisonnements dans les espaces euclidiens. Cela fournit aussi la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée : c'est souvent utile en maths... comme en physique, et probablement en SI !

Définition 4 — *Orthogonal d'une partie*

Si $X \subset F$, l'**orthogonal** de X, noté $X^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \langle x|y\rangle = 0\}.$$

Remarque : En pratique, X est souvent un singleton $\{v_0\}$ (et on note $v_0^\perp$ plutôt que $\{v_0\}^\perp$) ou un sous-espace de E.

On montrera sans problème le :

Fait : Si $X \subset E$, alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2. *Soit F est un sous-espace de E. Montrer : $F^\perp \perp F$.*

Les résultats suivants sont faciles à montrer (le faire tout de même : il s'agit d'un bon exercice, pour vérifier qu'on a bien compris ces mystérieuses histoires de quantificateurs et **surtout** de machins qu'on fixe...) et très utiles.

PROPOSITION 4 — Facile mais important

Dans un espace préhilbertien E :
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$;
- si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$;
- si $v_0 \in E$, alors $v_0^\perp = \mathrm{Vect}(v_0)^\perp$;
- $F \cap F^\perp = \{0\}$.

L'exercice suivant fournit également une série de résultats à savoir établir rapidement et proprement (plutôt que de les apprendre de façon imprécise).

Exercice 3. *Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer les relations suivantes :*
- *$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$;*
- *$F \subset (F^\perp)^\perp$;*
- *$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.*

REMARQUE : On verra que les deux dernières inclusions sont des égalités dans le cas de la dimension finie, mais peuvent être strictes en dimension quelconque. En particulier, si vous pensez les avoir montrées, reprenez vos démonstrations : pour montrer $A \subset B$, avez-vous commencé par FIXER un élément de A pour prouver À LA FIN qu'il était dans B ? Ben non ! C'est pour ça que vos démonstrations sont fausses... y compris probablement celles établissant des résultats pourtant corrects !

Continuons avec un résultat connu essentiellement depuis le collège !

THÉORÈME 2 — *Pythagore*

Soient $x_1, \ldots, x_k \in E$ ($k \geqslant 2$) ; alors :
- $x_1 \perp x_2$ si et seulement si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$;
- SI la famille $x_1, \ldots, x_k$ est orthogonale, ALORS :

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2 .$$

Exercice 4. *Pythagore a-t-il plutôt énoncé son théorème dans le cadre des espaces euclidiens ou préhilbertiens ?*

Encore une relation valable dans tous les préhilbertiens :

PROPOSITION 5 — Identité du parallélogramme

Si $x, y \in E$, alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|)^2).$$

PREUVE : Pfff... ■

Exercice 5. *Regarder le dessin suivant, et prendre un air inspiré.*

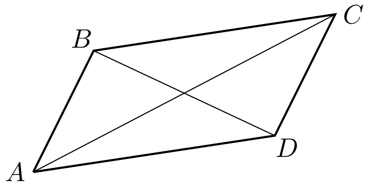


FIGURE 2 – $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2$

Exercice 6. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $\|f\|_\infty$ le maximum de $|f|$ (justifier l'existence...). Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E, mais qu'elle n'est pas euclidienne.*
Pour le second point, on cherchera f et g niant l'identité du parallélogramme.

1.4 Un exercice kleenex : utile sur le moment puis à jeter après utilisation !

Exercice 7. *Pour* $a, b \in \mathbb{R}$, *on pose* $f(a,b) = \displaystyle\int_0^1 \big(t^2 - (at+b)\big)^2 dt$.
Montrer que $\operatorname{Inf}\{f(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *est en fait un minimum, et le calculer.*

« Avec un peu de métier », on voit qu'il s'agit de déterminer la distance d'un bon vecteur à un bon sous-espace d'un bon espace vectoriel muni du bon produit scalaire...

— Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire usuel $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée. On a $f(a,b) = \big\|X^2 - (aX+b)\big\|^2$. Il s'agit donc de minimiser une distance (en fait, son carré).

— Faisons un dessin...

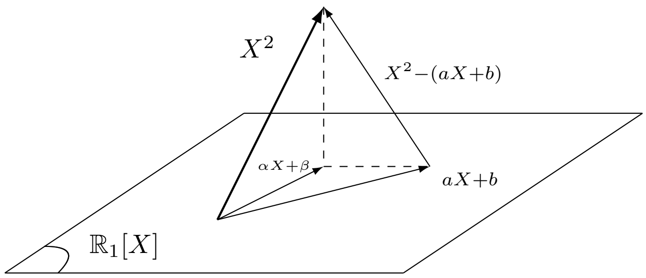


Figure 3 – Interprétation géométrique du problème

Sur le dessin, on fait intervenir un *hypothétique* vecteur $\alpha X + \beta$ tel que $X^2 - (\alpha X + \beta)$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$ (oui, celui que vous appellerez le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$...). Il semblerait qu'un tel vecteur, s'il existait, aurait un rôle particulier...

— SI PAR MIRACLE un tel vecteur $P_0 = \alpha X + \beta$ existe, on peut écrire grâce à Pythagore, au dessin, et à la décomposition qu'il inspire :

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \big\|X^2 - (aX+b)\big\|^2 = \big\|\big(X^2 - (\alpha X+\beta)\big) + \big((\alpha X+\beta) - (aX+b)\big)\big\|^2 \\ &= \big\|X^2 - (\alpha X+\beta)\big\|^2 + \|(\alpha - a)X + \beta - b)\|^2 \geqslant \big\|X^2 - (\alpha X+\beta)\big\|^2 = f(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

Les $f(a,b)$ sont donc minorés par une valeur particulière $f(\alpha,\beta)$, ce qui assure l'existence d'un minimum.

— Cherchons si, par hasard, un tel polynôme P_0 existe. La condition $P_0 \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp$ revient aux deux équations $\langle X^2 - (\alpha X+\beta)|1\rangle = 0$ et $\langle X^2 - (\alpha X+\beta)|X\rangle = 0$, soit : $\dfrac{\alpha}{2} + \beta = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot$ Ce système admet une unique solution $(\alpha,\beta) = (1, -1/6)$.

— Ainsi, $f(a,b)$ est minoré par $f(1,-1/6)$, qui est donc un minimum. Il ne reste plus qu'à calculer ce minimum, en notant que par construction, $\langle X^2 - \alpha X + \beta)|\alpha X + \beta\rangle = 0$, de sorte que :

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= \langle X^2 - \alpha X + \beta)|X^2 - \alpha X + \beta)\rangle = \langle X^2 - \alpha X + \beta)|X^2\rangle \\ &= \langle X^2|X^2\rangle - \langle X^2|X\rangle + \frac{1}{6}\langle X^2|1\rangle = \frac{1}{180}\cdot \end{aligned}$$

Remarques :

— Il est exclu de traiter ce type d'exercice sans faire de dessin (sauf à vouloir faire une petite blague).

— Très bientôt (quelques pages !), on verra que l'existence et l'unicité de P_0 étaient en fait acquises du simple fait qu'on travaille en dimension finie : le miracle n'en était pas un... et la rédaction pour ce type d'exercice sera donc très différente a posteriori.

— Bien des variantes de cet exercice vous seront proposées en TD, khôlles, et plus si affinités. [1]

1.5 Bases orthonormées

Le premier point à avoir en tête est qu'en base orthonormée (ou seulement orthogonale), la décomposition d'un vecteur est simple (contrairement à ce qui se passe dans le cas général).

1. Bon, c'est assez clair ou il faut (encore) faire un dessin ?

PROPOSITION 6 — Décomposition d'un vecteur en base orthonormée

Si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est une base **orthonormée** de E, alors :

$$\forall x \in E, \qquad x = \langle x|e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x|e_n\rangle e_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k.$$

Si $\mathcal{E}$ est seulement **orthogonale**, cette décomposition s'écrit :

$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x|e_k\rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

PREUVE : Écrire $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ et cogner contre e_k... ■

Exercice 8. *Comparer la complexité (en terme de multiplications/additions de réels, et en fonction de n) du coût de cette décomposition, et celle d'une décomposition générale en base quelconque. Dans les deux cas, on donnera une évaluation de ces coûts à la louche, sous la forme n^α, avec α à préciser.*

Le résultat qui suit dit qu'on peut toujours travailler en base orthonormée si on le souhaite (et on le souhaite souvent d'après l'exercice précédent !)

THÉORÈME 3 — *Existence de bases orthonormées*

Tout espace euclidien (préhilbertien de dimension finie) possède une base orthonormée.

PREUVE : On peut travailler par récurrence sur la dimension de E. Le cœur de la preuve étant qu'en prenant un vecteur x_0 de norme 1 puis on considérant son orthogonal, on obtient un espace euclidien (l'orthogonal) de dimension égale à la dimension de l'espace initial moins un. On en prend alors une base orthonormée, qu'on complète par x_0 pour avoir une base orthonormée de l'espace initial. ■

Le résultat suivant est plus précis, en plus d'être effectif : il dit qu'on peut trouver des bases orthonormées (ou orthogonales) particulièrement bien adaptées à une première base, non orthonormée.

THÉORÈME 4 — *Procédé de Gram-Schmidt*

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

PREUVE :
- — On fait quoi ?
- — Une récurrence !
- — Oui, mais avant ?
- — Un dessin ?
- — Bravo ! ! !

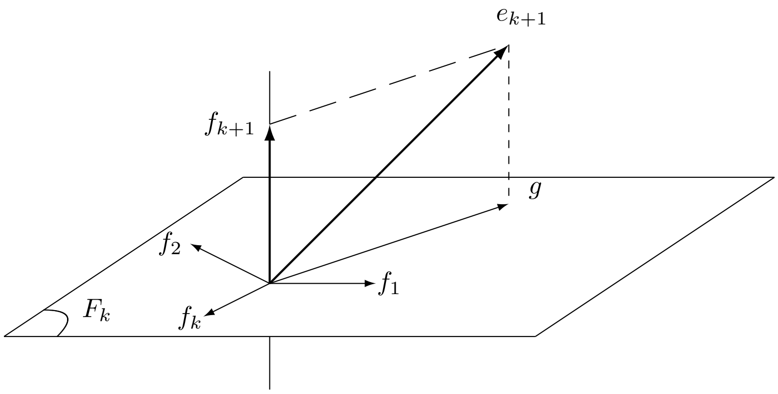


FIGURE 4 – Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Notons pour $k \in [\![1, n]\!]$: $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

— Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : « Il existe une famille orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$ telle que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i) = F_i$. »
— $\mathcal{P}(1)$ ne pose pas de problème : il suffit de prendre $f_1 = e_1$.
— Supposons $\mathcal{P}(k)$ établie, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$; on dispose donc de $(f_1, ..., f_k)$ qui constitue une base orthogonale de F_k. Ensuite, e_{k+1} n'est pas dans F_k (liberté des e_i). Le dessin nous suggère de chercher f_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - g$, avec $g \in F_k$ (on ne peut pas encore parler de projection, attention...). Maintenant, on peut chercher g sous la forme $\sum \alpha_i e_i$ ou bien sous la forme $\sum \beta_i f_i$. Le deuxième point de vue sera le bon puisqu'il conduit à des conditions d'orthogonalité très simples. En effet, on a $e_{k+1} - g \perp F_k$ si et seulement $\langle e_{k+1} - g | f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ (puisque $f_1, \ldots, f_k$ est une base de F_k), et cette condition s'écrit en fait $\beta_i \|f_i\|^2 = \langle e_{k+1} | f_i \rangle$, équation qui admet bien une solution, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.

Ainsi, $\mathcal{P}(k)$ est vérifié pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour $k = n$, on a le résultat souhaité. ■

Remarques :

— Dans la construction précédente, on a posé :

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_{k+1} | f_i \rangle}{\|f_i\|^2} f_i,$$

formule qu'il est INTERDIT d'apprendre. Ceci dit, il faut savoir la retrouver rapidement.
— On peut également énoncer un théorème d'« orthonormalisation », où on construit une base orthonormée. La preuve est la même : on normalise simplement les vecteurs à chaque étape, ce qui revient à prendre :

$$f_{k+1} = \frac{e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1} | f_i \rangle f_i}{\left\| e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1} | f_i \rangle f_i \right\|}.$$

— En y regardant de plus près, il y a unicité de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ si on impose qu'ils soient de norme 1, ainsi qu'une condition du type $\langle e_k | f_k \rangle > 0$ (puisqu'il existe deux vecteurs de norme 1 qui conviennent).
— Attention, on ne montrera jamais l'unicité par récurrence, pour éviter la petite blague classique « il existe un unique chemin allant de A à B et il existe un unique chemin allant de B à C, donc il existe un unique chemin allant de A à C ». L'existence est transitive ; pas l'unicité ! Pour montrer l'unicité, on s'intéresse à la dimension de $F_{k-1}^{\perp} \cap F_k$.

Le code Python correspondant est quasiment une traduction en anglais de l'algorithme :

```
def schmidt(ancienne, prod_scal):    # orthonormalisation
    e0 = ancienne[0]
    nouvelle = [e0 / prod_scal(e0, e0)**(0.5)]
    for i in range(1, len(ancienne)):
        projection = sum( prod_scal(ancienne[i], h)*h for h in nouvelle)
        f = ancienne[i] - projection
        nouvelle.append(f / prod_scal(f, f)**(0.5))
    return nouvelle

>>> schmidt([ array([1,1]), array([0,1])], vdot)
[array([ 0.70710678,  0.70710678]), array([-0.70710678,  0.70710678])]
>>> schmidt([ array([1,1,1]), array([1,-1,1]), array([1,0,0])], vdot)
[array([ 0.57735027,  0.57735027,  0.57735027]), array([ 0.40824829, -0.81649658,  0.40824829]),
 array([  7.07106781e-01,  -1.57009246e-16,  -7.07106781e-01])]
```

Notons qu'en combinant l'orthormalisation avec le théorème de la base incomplète, on obtient le « nouveau » (2022) résultat :

Théorème 5 — *« de la base orthonormée incomplète »*

Toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée de l'espace ambiant.

Terminons ce chapitre en notant que dans les bases orthonormées, les produits scalaires et normes se calculent « comme dans les petites classes » : en faisant des sommes de produits de coordonnées.

Proposition 7 — Expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormée

Si $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$, alors :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{et} \qquad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Preuve : Bilinéarité du produit scalaire. ■

En d'autres termes, $\langle x|y\rangle = X^{\mathrm{T}} Y$, avec X et Y les coordonnées de x et y dans $\mathcal{F}$. La section suivante va permettre de systématiser/automatiser un peu ce type de calculs, en base quelconque.

1.6 Projections orthogonales

Remarque : BIEN ENTENDU, on sait qu'il est grotesque de parler de LA projection sur un sous-espace F de E ; idem pour la symétrie par rapport à F (comment ces applications seraient-elles définies ? ? ? Précisez votre réponse sur un dessin SVP...)

Proposition 8 — Supplémentaire orthogonal

Si F est un sous-espace DE DIMENSION FINIE de E, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve : Prendre une base orthonormée de F et $x \in E$. On cherche $f \in F$ tel que $x - f$ soit orthogonal à F, ce qui revient à $\langle x - f|f_i\rangle = 0$ pour chacun des f_i de la base orthonormée choisie. En cherchant f sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, il s'agit donc de trouver des α_i tels que $\langle f|f_i\rangle - \alpha_i\langle f_i|f_i\rangle = 0$ pour tout i : ce n'est pas trop difficile. ■

Remarques :
- Ainsi, dans ce cadre, on pourra parler de la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. C'est en particulier vrai bien entendu si E est lui-même de dimension finie !
- Attention, si $E = \mathcal{C}([0,1])$ est muni du produit scalaire $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 fg$, alors le sous-espace F constitué des applications polynomiales est d'orthogonal réduit à $\{0\}$ (attention, je ne dis pas que c'est évident ! Mais c'est vrai...), donc $E \neq F \oplus F^{\perp}$.
- Ce dernier contre-exemple nous dit d'ailleurs que – contrairement à ce que j'allais écrire – une condition de la forme « $F^{\perp}$ est de dimension finie » ne fournira pas $E = F \oplus F^{\perp}$.

Définition 5 — *Projections et symétries orthogonales*

Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien E.
- La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F dans la direction $F^{\perp}$.
- La **symétrie orthogonale** par rapport à F est la symétrie par rapport à F dans la direction $F^{\perp}$.

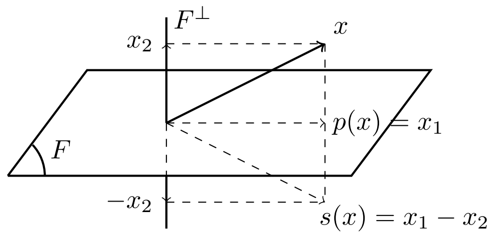


Figure 5 – Pas de projection ou de symétrie sans dessin...

Remarques :
- Pour que ces définitions aient un sens, il était crucial d'avoir $E = F \oplus F^{\perp}$.
- Comme toujours, les projections et symétries se déduisent l'une de l'autre par la relation $s = 2p - \mathrm{Id}$ à savoir retrouver très rapidement à l'aide d'un dessin...
- En pratique, pour calculer $p(x)$ ou $s(x)$ (au choix, d'après la remarque précédente), on calcule la projection y sur le plus petit espace dont on connaît une base $(e_1, \dots, e_k)$, si possible orthogonale ! On obtient les conditions d'orthogonalité en annulant les produits scalaire $\langle x - y|e_i\rangle$.

Exercice 9. *Soient p et s respectivement une projection orthogonale et une symétrie orthogonale.*
- *Montrer que la matrice A de p dans toute base vérifie $A^2 = A$. Montrer que si cette base est orthonormée, alors A est symétrique.*
- *Montrer que la matrice B de s dans toute base vérifie $B^2 = I_n$. Montrer que si cette base est orthonormée, alors B est symétrique et orthogonale.*

Il est essentiel de savoir calculer effectivement des projections orthogonales !

Proposition 9 — Calcul de projections orthogonales

Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur :

— une droite $\mathrm{Vect}(d)$ est :

$$p(x) = \frac{\langle x|d\rangle}{\|d\|^2}d;$$

— un hyperplan $n^\perp$ est :

$$p(x) = x - \frac{\langle x|n\rangle}{\|n\|^2}n;$$

— le sous-espace $\mathrm{Vect}(f_1, ..., f_k)$, avec $(f_1, ..., f_k)$ **orthogonale**, est :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x|f_i\rangle}{\|f_i\|^2}f_i.$$

Preuve : Dans le premier cas, on écrit $p(x) = \alpha d$, et $\langle x - p(x)|d\rangle = 0$. Dans le deuxième, $p(x) = x - \alpha n$ avec $p(x) \perp n$, et dans le troisième, $p(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$, avec $x - p(x)$ orthogonal à chaque f_i. Mais surtout :

ON FAIT SYSTÉMATIQUEMENT UN DESSIN

■

Définition 6 — *Des symétries orthogonales particulières*

Si s est la symétrie orthogonale par rapport à une droite, on parle de **retournement** ; si c'est par rapport à un hyperplan, on parle de **réflexion**.

Exercice 10. *En dimension finie, donner les matrices d'un retournement et d'une réflexion dans des bases adaptées. En déduire leur trace et leur déterminant, en fonction de $n = \dim(E)$.*

Proposition 10 — Distance à un sous-espace de dimension finie

Si F est un sous-espace de dimension finie d'un préhilbertien E et $x_0 \in E$, les distances $\|x_0 - y\|$ entre x_0 et les éléments y de F sont minorées par $\|x_0 - y_0\|$, où y_0 est le projeté orthogonal de x_0 sur F), qui est donc un minimum : on parle de la **distance de** x_0 **à** F.

Preuve : Dessin, Pythagore, épicétout. ■

Avec ces nouveaux résultats, la rédaction de « l'exercice kleenex » ressemblerait plutôt à ça : après avoir introduit le matériel géométrique et noté que $f(a, b) = \left\|X^2 - (aX + b)\right\|$, on peut affirmer que la borne inférieure recherchée est la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$, donc au projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. La suite des calculs est la même, mais la rédaction s'en trouve allégée puisque dès le début on connaît l'existence de ce projeté orthogonal, et il n'y a donc plus à écrire la moindre équivalence...

Exercice 11. CCP 2009

On pose, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right)$.

1. *Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire.*
2. *Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.*
3. *Calculer la distance de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.*
4. *Soit H le sous-espace de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de trace nulle. Montrer que c'est un sous-espace de E et préciser sa dimension. Calculer la distance de $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ à H.*

Lorsque $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien et $x \in E$, on a $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$, puis :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle^2$$

Mais qu'en est-il en dimension infinie ? Tout d'abord, il existe bien des bases orthonormées, mais elles sont en général peu intéressantes (leur existence est donnée par un argument non constructif). En fait, on dispose le plus souvent de familles orthonormées (qui ne sont pas des bases algébriques). On a alors un résultat qui ressemble au précédent :

Proposition 11 — Inégalité de Bessel – hors programme

> Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée d'un espace E. On a alors :
>
> $$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

Preuve : Si on note $F_n = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n)$, on a F_n de dimension finie, donc $E = F_n \oplus F_n^{\perp}$. On décompose alors x selon cette somme orthogonale, puis on Pythagorise. ■

1.7 Aspects matriciels

Définition 7 — *Matrice d'un produit scalaire*

> Soit $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Si φ est une forme bilinéaire symétrique (en particulier si c'est un produit scalaire), sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est :
>
> $$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E}) = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

On note dès maintenant que dans le cas d'une base orthonormée, la matrice représentant le produit scalaire est I_n. Dans le cas général, de telles matrices permettent bien entendu de calculer des produits scalaires...

Proposition 12 — Calcul matriciel des produits scalaires, changement de base

> Soit $\mathcal{E}$ une base d'un espace préhilbertien E.
> — Si $x, y \in E$ ont pour coordonnées $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans une base $\mathcal{E}$ et $A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{E})$ (avec φ le produit scalaire), alors :
>
> $$\langle x|y\rangle = X^{\mathrm{T}}AY,$$
>
> avec l'abus de notation qu'on imagine...
> — Si $\mathcal{F}$ est une autre base de E, $B = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{F})$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$, alors :
>
> $$B = P^{\mathrm{T}}AP$$

Preuve : Le premier résultat est une simple conséquence de la bilinéarité. Pour la formule de changement de base, se souvenir que :
— si x a pour coordonnées X et X' dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, alors $X = PX'$ (et non l'inverse) ;
— les identifications non justifiées restent à fuir comme la peste [2].

■

Remarque : Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, alors la formule de changement de base précédente nous donne : $P^{\mathrm{T}}P = I_n$ (et aussi bien entendu : $PP^{\mathrm{T}} = I_n$).

Définition 8 — *Matrices orthogonales*

> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
> — Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** lorsqu'elle vérifie $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I_n$.
> — L'ensemble des matrices orthogonales (n, n) constitue le **groupe orthogonal**, noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n, \mathbb{R})$.
> — Celles de déterminant 1 constituent le **groupe spécial orthogonal**, noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n, \mathbb{R})$.

2. Cette dernière offrant un taux de survie bien supérieur.

Remarques :
- $O_n(r)$ est bien un groupe (ouf!) pour la multiplication matricielle. C'est même un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- De même, $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
- Au fait, c'est quoi un (sous-)groupe ?
- Il suffit de vérifier une seule des deux relations $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I_n$; pourquoi ?

Proposition 13 — Matrices orthogonales vs. bases orthonormées

Soit E un espace euclidien.
- Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux bases orthonormées, alors la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ est orthogonale.
- Si $\mathcal{E}$ est orthonormée et la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ est orthogonale, alors $\mathcal{F}$ est orthonormée.

Preuve : Il suffit de regarder la formule de changement de base pour le produit scalaire... ■

Remarques :
- Le nom des matrices orthogonales est dangereux : on ne peut rien dire des matrices de passage entre bases orthogonales...
- Pour vérifier qu'une matrice est orthogonale, il suffit donc de vérifier que les vecteurs colonne constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -7\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$ sont orthogonales mais pas $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

On peut maintenant revisiter l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une version matricielle inattendue :

Théorème 6 — *Décomposition QR*

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ (triangulaire supérieure) telles que $A = QR$.

Preuve : Il suffit de bien géométriser le problème, calmement : on prend par exemple $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on note $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs représentée par A dans $\mathcal{E}$. Il s'agit d'une base puisque A est inversible. On peut l'orthonormaliser pour obtenir une troisième base $\mathcal{G}$. On a alors :

$$A = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{G}, \mathcal{E})\,\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

D'une part, $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{G}$ – deux bases orthonormées – donc est orthogonale. D'autre part, $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ est la matrice qui représente les f_k en fonction des g_i. Or, l'algorithme de Gram-Schmidt fournit une relation (une fois retournée) de la forme :

$$f_k = \|\cdots\|\, g_k + \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k | g_i \rangle g_i,$$

donc $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ est bien triangulaire supérieure. ■

Le code Python qui suit consiste essentiellement à passer d'une liste de vecteurs à une matrice, et réciproquement (avant et après la Gram-schmidtisation) :

```
def QR(A): # il faut transposer avant puis après, puisqu'on lit les lignes...
    ancienne = [A.transpose()[i] for i in range(len(A))]
    nouvelle = schmidt(ancienne, vdot)
    Q = array(nouvelle).transpose()
    return Q, Q.transpose().dot(A) # On évite d'inverser...

>>> A = array([[1,-1],[1,1]])
>>> Q, R = QR(A)
>>> Q, R
(array([[ 0.70710678, -0.70710678],
       [ 0.70710678,  0.70710678]]), array([[ 1.41421356,  0.        ],
       [ 0.        ,  1.41421356]]))
>>> Q.dot(R)
array([[ 1., -1.],
       [ 1.,  1.]])
```

1.8 Deux spécificités des espaces euclidiens

Dans un espace euclidien (préhilbertien de dimension finie), l'orthogonal d'un sous-espace est mieux maîtrisé : on connaît sa dimension. Cela permet d'affiner des inclusions vues plus tôt.

Proposition 14 — Dimension des orthogonaux dans les euclidiens

Si F est un sous-espace d'un espace E de dimension finie, alors :

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

Preuve : $E = F \oplus F^\perp$! ■

Corollaire : Soit E un espace de dimension finie.
- Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces, alors $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.
- Si F est un sous-espace, alors $(F^\perp)^\perp = F$.
- Si F est un sous-espace tel que $F^\perp = \{0\}$ alors $F = E$.

Le fait suivant est un simple constat :

Si on fixe $x_0 \in E$, alors l'application $x \mapsto \langle x|x_0\rangle$ est une forme linéaire sur E.

Le résultat qui suit nous dit qu'en fait, toute forme linéaire est de ce type.

Théorème 7 — *Théorème de représentation*

L'application $\Phi \left\| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ x_0 & \longmapsto & (x \mapsto \langle x|x_0\rangle) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

En particulier, si f est une forme linéaire, alors il existe un unique $x_0 \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \langle x|x_0\rangle.$$

Preuve : Montrer soigneusement la linéarité et l'injectivité, et regarder les dimensions.
On ne confondra pas Φ, $\Phi(x_0)$, et $\Phi(x_0)(x)$, BIEN ENTENDU... Ceux qui confondent encore f et $f(x)$ à ce moment de l'année peuvent passer leur chemin. ■

Corollaire : Si H est un hyperplan de E, alors il est de la forme $v^\perp$, pour un certain vecteur non nul $v \in E$.

2 Isométries dans les espaces euclidiens

Commençons par une petite remarque : si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve le produit scalaire, au sens où

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle,$$

alors il conserve la norme :

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exercice 12. *Énoncer et prouver la réciproque au constat précédent.*

Conserver l'un (ou l'autre, donc) impose l'injectivité (si $u(x) = 0$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$), donc la bijectivité.

2.1 Isométries vectorielles (automorphismes orthogonaux)

Ces deux termes sont synonymes mais c'est le premier qui sera utilisé prioritairement.

Définition 9 — *Isométries vectorielles*

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **une isométrie vectorielle** lorsqu'elle conserve la norme :

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|.$$

*On parle encore d'**automorphisme orthogonal**.*
L'ensemble des isométries vectorielles constitue un groupe pour la composition, noté $O(E)$ (groupe orthogonal géométrique).

EXEMPLES :
- les symétries orthogonales sont des isométries ;
- les rotations vectorielles en dimension 2 (qui seront détaillées plus tard) également ;
- attention, les projections orthogonales (sur autre chose que $\{0\}$ et E !) ne sont pas des automorphismes orthogonaux !

PROPOSITION 15 — Image d'une base orthonormée par une isométrie vectorielle

> Si $u \in O(E)$, il transforme toute base orthonormée en une base orthonormée. Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ transforme UNE base orthonormée en une base orthonormée, alors il est orthogonal (et transforme donc TOUTE base orthonormée en une base orthonormée !).

PREUVE : Le premier résultat est direct. Pour le second, ce n'est guère plus compliqué : décomposer un vecteur donné selon la base orthonormée en question. ■

2.2 Groupes orthogonaux

On note (après un petit rappel de la définition hors programme !) que $O(E)$ est un groupe géométrique ; en regardant les matrices associées dans des bases orthonormées, on va constater que les groupe orthogonaux géométrique et matriciels sont bien entendu cousins germains.

PROPOSITION 16 — Caractérisation matricielle des isométries

> Les trois propositions suivantes sont équivalentes, pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
> 1. u est une isométrie vectorielle ;
> 2. dans toute base orthonormée, la matrice de u est orthogonale ;
> 3. il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

PREUVE : C'est une traduction matricielle de la proposition 15. ■

REMARQUES :
- On notera les deux extrémités de la chaîne d'implication :
$$\exists b \ \|\perp\| \,;\ \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad u \in O(E) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall b \ \|\perp\|\,,\ \ldots$$
- On ne peut pas se contenter d'une base orthogonale : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas une isométrie vectorielle (il ne conserve pas la norme puisque e_1 est envoyé sur $2e_2$) bien que A soit une matrice orthogonale.
- Le déterminant des isométrie vectorielles vaut donc 1 ou -1...

DÉFINITION 10 — *Groupe spécial orthogonal*

> $SO(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E qui ont pour déterminant 1.

REMARQUE : Du fait des « propriétés morphiques » du déterminant, $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. Il sera parfois noté $O^+(E)$. C'est évidemment le cousin germain du groupe spécial orthogonal matriciel $SO_n(R)$. Attention, $O^-(E)$ n'existe pas !

Pour résumer, nous disposons de quatre groupes orthogonaux :
- $O(E)$ est l'ensemble des isométries vectorielles : elles conservent la norme et le produit scalaire.
- $SO(E)$ est le sous-groupe constitué des isométries vectorielles de déterminant 1.
- $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices orthogonales. Il s'agit des matrices de changement de base entre deux bases orthonormées. Elles sont aussi les matrices représentant les isométries vectorielles dans une base orthonormée.
- $SO_n(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de déterminant égal à 1.

Et ne vous plaignez pas : avant, il y en avait 4 de plus, avec les versions complexes !

2.3 Orientation des espaces euclidiens, produit mixte

Dans la suite, on va s'intéresser aux groupes orthogonaux en dimension 2 et 3. Pour pouvoir parler d'angles entre vecteurs puis de rotations, on commence par *orienter* les espaces euclidiens : il s'agit de déclarer directes ou indirectes les bases orthonormées de cet espace. On commence par choisir une base de référence qui est déclarée directe, puis on oriente les autres en fonction de leur matrice de passage (qu'on sait orthogonale) avec la base de référence.

DÉFINITION 11 — *Orientation d'un espace*

> Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E. On **oriente** E à l'aide de $\mathcal{B}_0$ en déclarant **directes** les bases orthonormées $\mathcal{B}$ de E telles que $\underset{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}{\mathrm{Pas}}$ est de déterminant 1, et **indirectes** les autres.

EXEMPLE : $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique est habituellement orienté à l'aide de la base canonique qui est déclarée directe. Pour $n = 3$, les bases orthonormées (e_2, e_3, e_1) et $(-e_3, e_1, -e_2)$ sont alors directes, alors que la base (e_2, e_1, e_3) est indirecte.

REMARQUE : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, elles ont même orientation si et seulement si $\underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{\mathrm{Pas}}$ est de déterminant 1. Pourquoi ? On peut également orienter un hyperplan en se fixant un vecteur normal :

DÉFINITION 12 — *Orientation d'un hyperplan*

> On suppose E orienté par une base $\mathcal{B}_0$. Soit H un hyperplan de E et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à H (de sorte que $E = H \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{n}$: pourquoi ?). On oriente H relativement à $\overrightarrow{n}$ en déclarant directes les bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de H telles que la base $\left(e_1, \ldots, e_{n-1}, \dfrac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\right)$ de E est orthonormée directe.

REMARQUE : Si une base $\mathcal{B}$ de H est directe relativement à $\overrightarrow{n}$, elle est indirecte relativement à $-\overrightarrow{n}$: pourquoi ? Ce type d'orientation interviendra dans les questions d'*angle* de rotation en dimension 3.

DÉFINITION 13 — *Produit mixte*

> Dans un espace euclidien E orienté par une base $\mathcal{B}_0$, le **produit mixte** de n vecteur est leur déterminant dans la base $\mathcal{B}_0$. Il est noté $\mathrm{Det}(v_1, ...v_n)$ (avec un D majuscule), ou encore $[v_1, ...v_n]$.
>
> $$\mathrm{Det}(v_1, ...v_n) = [v_1, ...v_n] = \det_{\mathcal{B}_0}(v_1, ...v_n)$$

REMARQUES :

- Si $\mathcal{B}_1$ est une autre base orthonormé *directe*, alors $[v_1, ...v_n] = \det_{\mathcal{B}_1}(v_1, ...v_n)$ (car $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_1) = 1$).
- En dimension 2, $[v_1, v_2]$ est l'aire (algébrique) du parallélogramme « défini par v_1 et v_2 », l'unité d'aire étant celle d'un carré porté par une base orthonormé.
- De même, en dimension 3, $[v_1, v_2, v_3]$ s'interprète comme le volume d'un parallélépipède.
- Après avoir plissé les yeux et avant de lire cette phrase, le lecteur aura évidemment fait deux dessins, et pas seulement dans sa tête...

2.4 Isométries en dimension 2

E est dans cette partie de dimension 2, et on l'oriente en choisissant une base orthonormée $\mathcal{E}_0$ que l'on déclare directe [3]. On va voir que les matrices orthogonales, ainsi que les endomorphismes orthogonaux sont complètement connus : ce sont des objets géométriques rencontrés au lycée (à l'époque sous leur forme affine : elles agissent sur des points plutôt que des vecteurs)...

2.4.1 Rotations

Commençons par la description de $SO_2(\mathbb{R})$: pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Un simple calcul permet de vérifier le
FAIT : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$, et de plus :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \qquad R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}.$$

3. En pratique, si on travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on déclare en général la base canonique directe.

Dit de façon snob : « l'application $\theta \mapsto R_\theta$ réalise donc un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $\big(SO_2(\mathbb{R}),.\big)$ ». Le résultat suivant précise que ce morphisme est surjectif.

Proposition 17 — Groupe spécial orthogonal matriciel

$SO_2(\mathbb{R}) = \big\{R_\theta \;\big|\; \theta \in \mathbb{R}\big\}$.

Preuve : L'inclusion $\supset$ a déjà été vue. Pour l'autre, on fixe $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$. $a^2+b^2=1$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$. De même, il existe $\psi \in \mathbb{R}$ telle que $c = \sin\psi$ et $d = \cos\psi$. La condition sur le déterminant s'écrit $\cos(\varphi+\psi) = 1$, donc $\varphi+\psi$ est de la forme $2k\pi$. On a alors $\sin\psi = \sin(2k\pi-\varphi) = -\sin\varphi$, et $\cos\psi = \cos(2k\pi-\varphi) = \cos\varphi$, de sorte que $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R_\varphi$. ■

Remarques :
- Cela inclut la matrice I_2 qui vaut R_0, mais aussi $R_{4000\pi}$.
- En changeant seulement la fin de la preuve, on montrerait que les matrices orthogonales de déterminant -1 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 13. *En utilisant les deux résultats de cette partie, montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

Reprenons l'étude géométrique de $SO(E)$: le résultat qui suit nous dit que ses éléments ont une matrice qui ne dépend pas de la base (orthonormée directe...) dans laquelle on les représente, ce qui est assez remarquable.

Proposition 18 — Groupe spécial orthogonal géométrique

Si $u \in SO(E)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormée directe, la matrice représentant u est R_θ.

Preuve : On sait que la matrice de u dans toute base orthonormée directe est dans $SO_2(\mathbb{R})$ donc de la forme R_θ, mais le tout est de montrer que cette matrice *ne dépend pas de la base considérée.*
Déjà, la matrice de u dans $\mathcal{E}_0$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$, donc de la forme $A = R_{\theta_0}$. Si $\mathcal{F}$ est une autre base orthonormée directe, la matrice B représentant u dans $\mathcal{F}$ est $B = P^{-1}AP$, avec P la matrice de passage entre $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{F}$. Puisque ces deux bases sont orthonormées directes, P est dans $SO_2(\mathbb{R})$, et on peut alors utiliser la commutativité (cf exercice 13) pour obtenir : $B = P^{-1}PA = A = R_{\theta_0}$. ■

Définition 14 — *Rotations vectorielles*

Si $\theta \in \mathbb{R}$, la rotation d'angle θ (que je noterai r_θ) est l'endomorphisme de E dont la matrice dans toute base orthonormée directe est R_θ.

Remarque : Si r est une rotation admettant un vecteur (non nul) x fixe (c'est-à-dire : $r(x) = x$), alors $r - \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective, donc son déterminant est nul. Si θ est un angle de cette rotation, ce déterminant vaut $(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta = 2\cos\theta - 1$. On a donc $\cos\theta = 1$ puis $\sin\theta = 0$: r est en fait l'application identité.

Exercice 14. *Soit $x \in E$. Montrer :* $[x, r_\theta(x)] = \sin\theta\,\|x\|^2$.
On pourra par exemple travailler dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur est $\dfrac{x}{\|x\|}$.

2.4.2 Réflexions

Commençons par quelques exercices simples mais qui éclaireront la suite...

Exercice 15. *Écrire la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}e_1$. Donner ensuite la matrice de cette même réflexion dans la base orthonormée directe (f_1, f_2), avec $f_1 = \dfrac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ et $f_2 = \dfrac{-e_1+e_2}{\sqrt{2}}$.*

Exercice 16. *Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ de la réflexion par rapport à $\mathbb{R}\left((\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2\right)$.*

Exercice 17. *Que dire de la composée de deux réflexions (sans rentrer dans les détails) ?*

Exercice 18. *Calculer le produit* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *en raisonnant uniquement géométriquement. Vérifier* ensuite *le résultat par le calcul !*

Proposition 19 — Rotations et réflexions

- Les éléments de $O(E)$ qui ne sont pas des rotations sont des réflexions.
- Toute rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions.

Preuve :

- Soit $u \in O(E) \setminus SO(E)$: La matrice A de u dans $\mathcal{E}_0$ est dans $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$, donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Deux possibilités alors :
  1. On a traité l'exercice 16, et on peut alors affirmer que u est la réflexion par rapport à $\mathbb{R}\big(\cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2\big)$, avec $\mathcal{E}_0 = (e_1, e_2)$.
  2. On ne l'a pas traité (bravo...) et on peut alors chercher s'il existe des vecteurs (non nuls) vérifiant $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$, ce qui revient à la non injectivité de $u - \mathrm{Id}_E$ et $u + \mathrm{Id}_E$. Les déterminants de $\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix}$ étant nuls, on est effectivement assuré de l'existence de x_1 et x_2 non nuls tels que $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$. Puisque $\langle u(x_1)|u(x_2)\rangle$ vaut d'une part $\langle x_1|x_2\rangle$ et d'autre part $\langle x_1|-x_2\rangle = -\langle x_1|x_2\rangle$, on a donc x_1 et x_2 orthogonaux, puis $E = \mathbb{R}x_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}x_2$, et u est bien la réflexion par rapport à $\mathbb{R}x_1$.
     Ici, on se dit que finalement, on aurait peut-être bien fait de traiter l'exercice 16...
- Soit $r \in SO(E)$: si on fixe une réflexion s, alors $r \circ s$ est dans $O(E) \setminus SO(E)$ (regarder le déterminant !) donc est une réflexion s' d'après ce qui précède. Mais dans la relation $r \circ s = s'$, si on compose à droite par s, on trouve : $r = s' \circ s$!

■

Remarques :

- Attention ! ! ! ! le premier résultat est spécifique à la dimension 2. En dimension supérieure, il existe des éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ qui ne sont pas des réflexions. Cependant, tout élément de $O(E)$ peut s'écrire comme la composée d'au plus n réflexions.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition comme composée de deux réflexions : au vu de la preuve, on peut même prendre la première comme on veut !

2.4.3 Angle orienté entre deux vecteurs

Fait : Si $x, y \in E$ sont de norme 1, alors il existe une unique rotation r telle que $r(x) = y$.

Preuve : Pour l'existence, il suffit de compléter x en une base orthonormée directe (x, x') et y en une base orthonormée directe (y, y'). L'unique application linéaire envoyant x sur y et x' sur y' répond alors au problème (justifier l'existence de cette application, et le fait qu'elle répond au problème !).
Pour l'unicité, il suffit de noter que si r_1 et r_2 répondent au problème, alors $r_1^{-1} \circ r_2$ est une rotation (pourquoi ?) qui admet un point fixe (lequel ?) donc vaut l'identité (pourquoi ?). ■

Remarque : En dimension supérieure, l'existence est maintenue (en termes snobs, on dit que « $SO(E)$ agit transitivement sur la sphère unité de E »). Cependant, l'unicité n'est plus valide (on peut compléter de nombreuses façons, contrairement à la dimension 2).

Définition 15 — *Angle orienté entre deux vecteurs*

Soient a et b deux vecteurs non nuls de E. On dit (abusivement) que θ est l'angle orienté entre a et b, et on note $\theta = \widehat{(a, b)}$, lorsque $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\theta\Big(\dfrac{a}{\|a\|}\Big)$.

Remarque : En fait, si $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\theta\Big(\dfrac{a}{\|a\|}\Big)$, alors $\dfrac{b}{\|b\|} = r_\varphi\Big(\dfrac{a}{\|a\|}\Big)$ si et seulement si φ est de la forme $\theta + 2k\pi$ (dans un sens, c'est clair, mais dans l'autre ? pour montrer le sens « seulement si », on pourra se rappeler que la seule rotation avec un point fixe est l'identité). Ainsi, l'angle orienté entre deux vecteurs est « défini modulo 2π ». Il est caractérisé par son cosinus et son sinus.

Le résultat suivant permet de calculer effectivement les angles orientés. Pour le prouver, et très exceptionnellement, on se placera dans une base orthonormée directe adaptée...

FAIT : Si $\theta = \widehat{(a,b)}$, alors $\langle a|b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\theta$ et $[a,b] = \|a\|\,\|b\|\sin\theta$.

2.5 Isométries en dimension 3

2.5.1 Produits mixte et vectoriel

L'espace est orienté par une base $\mathcal{E}_0$ déclarée directe.

REMARQUE : *À MÉDITER AVANT LA SUITE...*

Le produit mixte « hérite » des propriétés du déterminant : en particulier, si on FIXE $a, b \in E$, alors l'application $\varphi : x \mapsto [a,b,x]$ est linéaire. C'est donc une forme linéaire, et on sait alors [4] qu'il existe un unique $c \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle c|x\rangle$ (attention à la quantification...).

DÉFINITION 16 — *Produit vectoriel*

> Soient $u, v \in E$. Le **produit vectoriel** de u et v, noté $u \wedge v$, est l'unique vecteur z tel que :
>
> $$\forall w \in E \qquad [u,v,w] = \langle z|w\rangle.$$

Les premiers résultats qui suivent s'obtiendraient facilement à l'aide des formules fournissant les coordonnées d'un produit vectoriel dans une base orthonormée. Cependant, on peut les démontrer à partir de la définition précédente, qui est assez abstraite, mais qui a le mérite de ne pas fournir des formules étranges, parachutées, et dépendant (a priori) d'une base particulière.

PROPOSITION 20 — Propriétés bien connues du produit vectoriel...

> *(Les quantificateurs universels sont implicites)*
> — $u \wedge u = \overrightarrow{0}$, $v \wedge u = -u \wedge v$ (attention !),
>
> $$(\lambda u_1 + u_2) \wedge v = \lambda u_1 \wedge v + u_2 \wedge v, \qquad u \wedge (\lambda v_1 + v_2) = \lambda u \wedge v_1 + u \wedge v_2;$$
>
> — $u \wedge v \in \big(\mathrm{Vect}(u,v)\big)^{\perp}$;
> — u et v sont colinéaires si et seulement si $u \wedge v = 0$;
> — si u et v ne sont pas colinéaires, alors $(u, v, u \wedge v)$ est libre.

PREUVE :

- Pour tout $w \in E$, le caractère alterné du déterminant nous assure : $\langle u \wedge u|w\rangle = [u,u,w] = 0 = \langle \overrightarrow{0}|w\rangle$. Ceci étant valable pour tout w, on a donc $u \wedge u = \overrightarrow{0}$. Même chose pour les 3 autres relations.
- Soit $z \in \mathrm{Vect}(u,v)$: il s'écrit $z = \alpha u + \beta v$, et on a alors :

  $$\langle u \wedge v|z\rangle = [u,v,z] = \alpha[u,v,u] + \beta[u,v,v] = 0,$$

  donc $u \wedge v$ est orthogonal à tous les éléments de $\mathrm{Vect}(u,v)$.
- Déjà, si u et v sont colinéaires, $\langle u \wedge v|w\rangle[u,v,w] = 0$ pour tout $w \in E$, donc $u \wedge v = \overrightarrow{0}$. Établissons la réciproque par la contraposée : on suppose (u,v) libre. On peut alors compléter cette famille en une base (u,v,w). Le déterminant $[u,v,w]$ est alors non nul, donc $\langle u \wedge v|w\rangle \neq 0$, donc $u \wedge v \neq \overrightarrow{0}$.
- Il suffit de noter que le déterminant $[u, v, u \wedge v]$ vaut $\langle u \wedge v|u \wedge v\rangle = \|u \wedge v\|^2$, qui est non nul d'après le résultat précédent.

■

Ça y est : voila la formule que vous attendiez...

PROPOSITION 21 — Calcul effectif de produit vectoriel

> Si les coordonnées de u et v *dans une base orthonormée directe* $\mathcal{E}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors celles de $u \wedge v$ dans cette même base sont : $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$

4. Grâce au théorème de représentation.

PREUVE : Simple calcul. Si x a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$, alors en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$\langle x|u \wedge v\rangle = [u, v, x] = \begin{vmatrix} a & a' & x_1 \\ b & b' & x_2 \\ c & c' & x_3 \end{vmatrix} = x_1(bc' - cb') - x_2(ac' - ca') + x_3(ab' - ba') = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$$

et on peut identifier les deux extrémités car la relation est valable pour tout x. ■

REMARQUE : On retiendra : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc' - b'c \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$ mais *attention* : il faut que la base dans laquelle on a pris les coordonnées soit **orthonormée directe**.

Les deux corollaires suivants sont très utiles en pratique...

COROLLAIRE : Si (u, v) est une famille orthonormée, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.

COROLLAIRE : Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de E, alors $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$, et les autres produits vectoriels s'obtiennent par antisymétrie.

Exercice 19. Utile pour la suite...
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ *de l'application* $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{x}$*, avec* $x_0 = (a, b, c)$.

De façon plus anecdotique (en maths, pas en méca) !

PROPOSITION 22 — Double produit vectoriel

Si $a, b, c \in E$, on a :

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a|c\rangle b - \langle a|b\rangle c.$$

PREUVE : Déjà si (b, c) est liée, alors le membre de gauche est nul, ainsi que le membre de droite. On va donc traiter le cas où (b, c) est libre, et on fixe b et c ainsi. Si on note $H = \mathrm{Vect}(b, c)$, on a alors $d = b \wedge c \in H^\perp$, donc $a \wedge d$ est orthogonal à d, donc est dans $(H^\perp)^\perp = H$.
On travaille donc dans une base adaptée au problème : il existe (pourquoi ?) une base orthonormée directe (f_1, f_2, f_3) telle que $b = \alpha f_1$ et $c = \beta f_2 + \gamma f_3$. On écrit alors $a = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$, et on calcule les coordonnées de chacun des deux membres dans cette base. Pour le membre de gauche :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\alpha\gamma \\ -a_1\alpha\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

et pour le membre de droite :

$$(a_1\beta + a_2\gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a_1\alpha \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\gamma\alpha \\ -a_1\alpha\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gagné... ■

REMARQUE : Voila comment je la retiens (plus ou moins...) : je refais le raisonnement vu en début de preuve, et je sais alors que $a \wedge (b \wedge c) = \alpha b + \beta c$; je sais que α et β sont des produits scalaires, et que dans chacun des deux termes, a, b et c apparaissent. Je sais qu'il y a un signe MOINS, et je traite un cas particulier « avec les doigts » pour savoir où.

Exercice 20. *Donner une formule analogue pour* $(a \wedge b) \wedge c$ *:*
— *En utilisant l'anti-commutativité et la formule précédente ;*
— *avec des considérations similaires à celles données dans la remarque précédente.*

2.5.2 Écart angulaire entre deux vecteurs

On ne peut plus parler d'angle orienté entre deux vecteurs, en dimension 3 (on pourrait être tenté de se ramener à la dimension 2, mais il faudrait pour cela orienter le plan qu'ils engendrent, or il y a deux façons « équiraisonnables » de faire : comment choisir ?). On prend donc le parti de ne regarder que le produit scalaire, dont on déduira un angle entre 0 et π, les cas extrêmes correspondant aux cas où les vecteurs sont (positivement ou négativement) liés.

DÉFINITION 17 — *Écart angulaire*

Si u et v sont deux vecteurs non nuls de E, l'écart angulaire entre u et v, noté (u, v) (?) est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\langle u|v\rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$.

REMARQUES :

- C'est bien licite d'après Cauchy-Schwarz...
- Avec cette définition, on vérifie immédiatement que les endomorphismes orthogonaux conservent les écarts angulaires.
- Lorsque u et v sont positivement (resp. négativement) liés, leur écart angulaire est 0 (resp. π), et réciproquement (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

On termine par une formule bien connue en physique, claire lorsque les vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux :

FAIT : Si θ est l'écart angulaire entre x et y, alors : $\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta$.

PREUVE : Travailler dans une base adaptée au problème, comme toujours... ■

COROLLAIRE :

$$\forall a, b \in E, \qquad \|a \wedge b\|^2 + \langle a|b\rangle^2 = \|a\|^2 \times \|b\|^2$$

(c'est « l'identité de Lagrange »).

2.5.3 Étude des rotations

On ne peut pas décrire les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ aussi simplement que ceux de $SO_2(\mathbb{R})$. Par contre, géométriquement, la description des membres de $SO(E)$ est relativement claire :

PROPOSITION 23 — Groupe spécial orthogonal géométrique

Si $u \in SO(E)$, alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{F}$ telle que :

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(la question de l'unicité de $\mathcal{F}$ et θ sera discutée plus loin).

PREUVE : La clef de voûte de la preuve est l'existence d'un vecteur (non nul !) fixé par u. On propose ici une preuve efficace (une preuve géométrique est fournie dans les remarques). On veut montrer que $u - \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective. Considérons [5] l'application $\varphi : \lambda \mapsto \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$. En travaillant dans n'importe quelle base, on voit que φ est une application polynomiale du troisième degré, de coefficient dominant -1, et qui vaut $\det u = 1$ en 0. Puisqu'elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$ (du fait de son coefficient dominant), sa continuité nous assure (théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$. On a alors $u - \lambda_0$ non injective, donc il existe x_0 non nul tel que $u(x_0) = \lambda_0 x_0$. Comme u préserve la norme, on doit avoir $|\lambda_0| = 1$, puis $\lambda_0 = 1$, et c'est gagné. On sait maintenant que $\mathbb{R}x_0$ est stable par u, donc son orthogonal $H = x_0^\perp$ également (déjà prouvé plus tôt mais refaites le sans revenir en arrière dans le poly !). Ainsi, u induit un endomorphisme v de H. Cet endomorphisme reste orthogonal (pourquoi ?). Si on fixe une base orthonormée (f_2, f_3) de H et on note $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de v dans cette base (on sait déjà que $R \in O_2(\mathbb{R})$), on a en prenant $f_1 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$: $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.
Comme $\det u = 1$, on a donc $\det R = 1$, donc $R \in SO_2(\mathbb{R})$, ce qui impose sa forme. Si jamais $\mathcal{F}$ n'est pas directe, il suffit de remplacer f_1 par son opposé, ce qui n'affecte pas la matrice.
En fait, j'ai imposé le caractère direct dans l'énoncé car c'est sous cette condition qu'on parlera de la rotation d'axe dirigé et orienté par f_1 et d'angle θ... ■

REMARQUES :

- Sans passer par le déterminant de $\lambda \mathrm{Id}_E - u$, on peut prouver l'existence d'un vecteur non nul fixe de façon purement géométrique : on fixe x_0 non nul. Si $u(x_0) = x_0$, c'est terminé. Sinon, il existe une réflexion s_1 par rapport à un hyperplan H_1 envoyant $u(x_0)$ sur x_0. L'application $v = s_1 \circ u$ envoie alors x_0 sur lui-même : comme v est orthogonal, il stabilise $x_0^\perp$. Maintenant, la restriction de v à $x_0^\perp$ est une réflexion (déterminant...) par rapport à une droite $\mathbb{R}x_1$. v est alors la réflexion s_2 par rapport à $H_2 = \operatorname{Vect}(x_0, x_1)$. Ainsi, $s_1 \circ u = s_2$, puis $u = s_1 \circ s_2$, et il n'y a plus qu'à considérer l'intersection $H_1 \cap H_2$: c'est une droite (ou un plan) dont les éléments sont fixés par les deux réflexions, donc par u : gagné !

5. Ce fragment de poly a été écrit à l'époque pour des sups, qui ne connaissaient pas la réduction !

— Géométriquement, l'application u de la proposition précédente agit de la façon suivante : si $x \in E$, on le décompose $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in \mathbb{R}f_1$. La composante x_2 n'est pas modifiée, tandis que u opère une rotation de la composante x_1 d'angle θ, H étant orienté par la base orthonormée (f_2, f_3) :

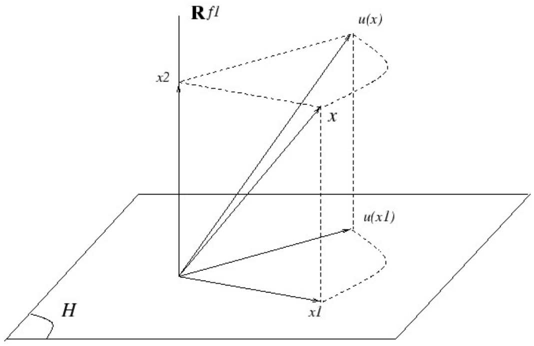


FIGURE 6 – Un vieux dessin que je n'ai pas le courage de refaire... désolé pour la qualité !

— Que dire si par ailleurs $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{F}'$ une autre base orthonormée directe ? Déjà, par égalité des traces, on a $\cos\theta = \cos\varphi$ donc $\theta = \varphi\ [2\pi]$ ou bien $\theta = -\varphi\ [2\pi]$. Si θ (donc φ) est de la forme $2k\pi$, u vaut l'identité et on pouvait prendre $\mathcal{F}$ n'importe comment. Sinon, $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}f_1 = \mathbb{R}f_1'$, donc f_1' vaut f_1 ou $-f_1$.

Dans le premier cas, la matrice de changement de base entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$ avec $R \in SO_2(\mathbb{R})$. Par commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$, la formule de changement de base nous fournira alors $R_\varphi = R_\theta$ donc $\varphi = \theta\ [2\pi]$.
Dans le second cas, $\mathcal{F}'' = (f_1, f_3', f_2')$ est orthonormée directe et la matrice de passage entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}''$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$ avec $R \in SO_2(\mathbb{R})$, donc la matrice de u dans $\mathcal{F}''$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Comme par ailleurs c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, on en déduit que $\varphi = -\theta\ [2\pi]$. Ouf...

DÉFINITION 18 — *Rotation dans l'espace*

La rotation d'axe *dirigé et orienté* par f et d'angle θ sera par définition l'endomorphisme tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{F}$ dont le premier vecteur est $\dfrac{f_1}{\|f_1\|}$:

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

REMARQUES :

— Pour savoir si une matrice A est dans $O_3(\mathbb{R})$, on regarde si « les trois vecteurs colonnes (c_1, c_2, c_3) forment une famille orthonormée ». Lorsque c'est le cas, pour déterminer si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, inutile de calculer le déterminant : il suffit de calculer $c_1 \wedge c_2$, qui vaut c_3 lorsque $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et $-c_3$ sinon. En fait, le signe de la première composante (si elle est non nulle) permet de conclure !

— On a $R_{f,\theta} = R_{g,\varphi}$ si et seulement si :

f et g sont positivement liés et $\theta = \varphi\ [2\pi]$
ou
f et g sont négativement liés et $\theta = -\varphi\ [2\pi]$

— Concrètement, pour déterminer les éléments propres (direction, angle) d'une rotation u donnée par sa matrice, on commence par déterminer sa direction $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$, son « angle non orienté » à l'aide de la trace. Ensuite, on oriente $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ à l'aide d'un vecteur f. Pour déterminer le signe de θ (avec disons $\theta \in]-\pi, \pi]$), on peut prendre $g \in f^\perp$ (ce n'est guère difficile à construire) et comparer $u(g)$ et $f \wedge g$: *moralement* si $\theta \in]0, \pi[$, $u(g)$ sera « du coté de $f \wedge g$ », et sinon « du coté de $-f \wedge g$ », ce qui va se détecter en regardant le signe du produit scalaire $\langle u(g) | f \wedge g \rangle$.

Plus formellement : en notant $f_1 = f$, $f_2 = \dfrac{g}{\|g\|}$ et $f_3 = f_1 \wedge f_2$, les coordonnées respectives de $u(g)$ et $f \wedge g$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ \|g\|\cos\theta \\ \|g\|\sin\theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \|g\| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|g\| \end{pmatrix}$ donc leur produit scalaire $\|g\|^2 \sin\theta$ est bien du signe de $\sin\theta$.

Exemple : Déterminons la nature géométrique précise de l'endomorphisme u de E dont la matrice dans une base orthonormée[6] $\mathcal{E}$ est : $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

En notant c_1, c_2 et c_3 les trois colonnes de A, on vérifie sans mal : $\|c_1\|^2 = \|c_2\|^2 = \|c_3\|^2 = 1$ et $\langle c_1|c_2\rangle = \langle c_1|c_3\rangle = \langle c_2|c_3\rangle = 0$, donc $A \in O_3(\mathbb{R})$. On sait alors que $c_1 \wedge c_2$ vaut c_3 ou $-c_3$. Or : $c_1 \wedge c_2 = \begin{pmatrix}>0\\ \times\\ \times\end{pmatrix}$, donc $c_1 \wedge c_2 = c_3$, et $A \in SO_3(\mathbb{R})$. Puisque c'est la matrice représentant u dans une b.o.n., u est donc une rotation. On détermine sa direction qui est $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$: on trouve (en regardant droit dans les yeux $A - I_3$ qu'on aura calculé correctement, et en cherchant un habitant du noyau) $\mathbb{R}f$, avec $f = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$. Le cosinus de l'angle est donné par $\operatorname{tr} u = 1 + 2\cos\theta = 2$ donc $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ puis $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}\cdot$ Le vecteur $g = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ est dans $f^\perp$. $f\wedge g = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ et $u(g) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ donc $\langle f\wedge g|u(g)\rangle = -3 < 0$, donc u est la rotation d'axe dirigé et orienté par f, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}\cdot$

Remarque : Réciproquement, si on cherche la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{E}$ (directe ou pas) de la rotation de direction/orientation et angle connu, on pourra prendre l'un des deux points de vue suivants (je n'ai pas de préférence, mais certains collègues lèvent les yeux au ciel quand ils voient la première) :

- On travaille dans une base adaptée et on fait un changement de base (se souvenir qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormées n'est pas trop compliquée à inverser...). Bien entendu, par « base adaptée », on entend une base orthonormée directe dont le premier vecteur est sur l'axe : il suffit de normaliser le vecteur directeur de l'axe. Pour le second , on prend n'importe quel vecteur orthogonal au premier et de norme 1. Pour le troisième, il suffit de prendre le produit vectoriel des deux premiers !
- On retrouve rapidement le fait que si u est la rotation d'axe dirigé et orienté par x_0 de norme 1, alors :

$$u(x) = \langle x|x_0\rangle x_0 + \cos\theta(x - \langle x|x_0\rangle x_0) + (\sin\theta)x_0 \wedge x$$

(faire un dessin : la composante sur $\mathbb{R}x_0$ est le premier terme. La rotation sur la composante x_1 de x sur $x_0^\perp$ amène le terme $(\cos\theta)x_1 + (\sin\theta)x_0 \wedge x_1$...). Attention : si x_0 n'est pas de norme 1, il faut penser à le normaliser dans la formule précédente.
Ensuite, on peut calculer l'image de chaque membre de la base $\mathcal{E}$, ou bien utiliser les matrices des différentes applications intervenant dans la formule précédente : si $x_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$, la matrice de $x \mapsto \langle x|x_0\rangle x_0$ sera $\begin{pmatrix}a^2 & ba & ca\\ ab & b^2 & cb\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$ On calcule ensuite :

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ c\\ -b\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c\\ 0\\ a\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ -a\\ 0\end{pmatrix}$$

de sorte que la matrice dans $\mathcal{E}$ de $x \mapsto x_0 \wedge x$ sera $\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$.

On note que les matrices antisymétriques représentent exactement les applications de la forme $x \mapsto x_0 \wedge x$ dans les bases orthonormées.

Bien entendu, il faut avoir pratiqué **soi-même** 3 ou 4 fois pour être à peu près autonome. Comme la plupart d'entre-vous allez seulement voir un guignol s'agiter au tableau pour le faire deux ou trois fois devant vous, il ne sera peut-être pas évident de le refaire vous même le 15 juillet 2023, pour votre dernier oral[7]...

Exercice 21. *Donner la matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1 + e_2 + e_3$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}\cdot$ Que vaut A^3 ?*

Solution : On trouvera : $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Faites les deux calculs, pour pouvoir choisir celui qui vous convient le mieux.

6. Pas forcément directe : on s'en fiche !
7. Encore une remarque pour vous montrer que j'ai repris mon poly cette année.

Remarque : Ceux qui « voient dans l'espace » et/ou sont champions de Rubik's Cube (un jeu qui a occupé vos ancêtres dans un lointain passé...) n'avaient pas besoin de faire le moindre calcul !

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints (symétriques)

Les deux orthographes *auto-adjoint* et *autoadjoint* sont pratiquées et (donc) autorisées. Ce terme est synonyme mais remplace prioritairement le terme « symétrique », pour un endomorphisme.

3.1 Les endomorphismes autoadjoints (symétriques)

Définition 19 — *Endomorphismes symétriques*

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme de E est déclaré **autoadjoint**, ou **symétrique** lorsque :

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

On note en général $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Exercice 22. *Montrer que les projections orthogonales sont des endomorphismes autoadjoints.*

Cette définition ne donne pas accès rapidement à beaucoup d'exemples. Le résultat suivant va donner une caractérisation matricielle simple.

Proposition 24 — Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints

Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E. L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{E}$ est symétrique.

Preuve : Avec les notations qu'on imagine (coordonnées et matrice dans $\mathcal{E}$), on a $(AX)^{\mathrm{T}}Y = X^{\mathrm{T}}(AY)$, et ceci pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; etc. ■

Exercice 23. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable dans une base orthonormée. Montrer que u est symétrique.*

La suite va révéler que cette situation est en fait générique : tous les endomorphismes autoadjoints sont effectivement diagonalisables en base orthonormée.

3.2 Deux résultats intermédiaires

La preuve (hors programme) du théorème spectral repose sur deux outils principaux présentés ici.

Proposition 25 — La première valeur propre

Tout endomorphisme autoadjoint possède (au moins) une valeur propre réelle.

Preuve (hors programme) :
Version misérable : on écrit $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \neq 0$. D'une part, $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX = \lambda\overline{X}^{\mathrm{T}}X = \lambda\sum|x_i|^2$. D'autre part, puisque $A = \overline{A}$:

$$\overline{X}^{\mathrm{T}}AX = \overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}X = \overline{AX}^{\mathrm{T}}X = \overline{\lambda X}^{\mathrm{T}}X = \overline{\lambda}\sum|x_i|^2.$$

Et on en déduit piteusement que $\lambda = \overline{\lambda}$.
Il existe une belle [8] preuve qui est plus compliquée, mais ne consiste pas à faire ce calcul mystérieux. On maximise pour cela $\langle u(x)|x\rangle$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, avec u canoniquement associé à A puis on fait un développement limité autour du point où ce maximum est atteint... Bon, passons ! ■

La deuxième brique de la preuve du théorème spectral est bien plus simple à prouver !

Proposition 26 — Orthogonal d'un sous-espace stable

Si F est un sous-espace de E stable par un endomorphisme autoadjoint u, alors $F^{\perp}$ est également stable par u.

Preuve : Fixons $x \in F^{\perp}$. Pour montrer que $u(x)$ est dans $F^{\perp}$, on le cogne contre $y \in F$; détails laissés au lecteur. ■

8. Mais surtout : qui a du sens !

3.3 Théorème spectral

Théorème 8 — *« Théorème spectral sans E à la fin »*

Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée.

Preuve : Par récurrence, en considérant l'orthogonal d'un vecteur propre : il est stable par l'endomorphisme autoadjoint, la restriction de ce dernier restant autoadjointe. ■

Exercice 24. *Soit u un endomorphisme autoadjoint de E, espace euclidien de dimension n, de valeurs propres triées par ordre croissant : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer :*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \qquad \lambda_1 \leqslant \frac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n,$$

en exhibant des cas d'égalité.

Théorème 9 — *« Théorème spectral sans E à la fin » – version matricielle*

Toute matrice symétrique réelle S est **orthodiagonalisable** : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

Preuve : Géométriser ! ■

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve un premier vecteur propre « à vue » : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On cherche alors sur l'orthogonal : $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Si (après normalisation) on pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors P est orthogonale, et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.4 Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs

Le résultat qui suit peut être vu comme un exercice, mais est crucial dans les définitions passées maintenant au programme : il convient de savoir les traiter les yeux bandés.

Exercice 25. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que les valeurs propres de u sont toutes positives si et seulement si :*

$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x)|x\rangle \ \geqslant 0$$

On établirait la même équivalence en remplaçant « positif » par « strictement positif ».

Définition 20 — *Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs*

Un endomorphisme **autoadjoint** $u \in \mathcal{S}_E$ est déclaré :
- **positif** lorsque toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ (ou encore : $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$).
- **défini positif** lorsque toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_*^+$ (ou encore : $\langle u(x)|x\rangle > 0$ pour tout $x \in E$ non nul).

On définit de la même façon la notion de matrice (définie) positive.

Définition 21 — *Matrices symétriques (définies) positives*

Une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est déclarée :
- **positive** lorsque toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$ (ou encore : $X^{\mathrm{T}}AX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
- **définie positive** lorsque toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_*^+$ (ou encore : $X^{\mathrm{T}}AX > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul).

Exercice 26. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{\mathrm{T}}A$ est positive. Montrer que si A est inversible, alors $A^{\mathrm{T}}A$ est définie positive.*

3.5 Quelques applications

Aucune des applications qui suit n'est explicitement au programme. Cependant, la première (« racine d'un autoadjoint positif ») est vraiment à connaître, au moins pour la partie « existence », la partie « unicité » étant très instructive, mais clairement plus difficile (essentiellement géométrique, contrairement à l'existence, qu'on peut traiter à encéphalogramme plat grâce aux matrices). La décomposition polaire et celle de Cholesky constituent des exercices abordables.

3.5.1 Racine d'un endomorphisme symétrique positif

Proposition 27 — Racine d'un autoadjoint positif

> Soit u un endomorphisme de E autoadjoint positif. Il existe alors un unique v autoadjoint positif tel que $v^2 = u$.

Preuve : L'existence est assez simple : si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de diagonalisation de u, avec $u(e_k) = \lambda_k e_k$, il suffit de prendre v l'unique endomorphisme de E de matrice $\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ dans $\mathcal{E}$: il s'agit bien (pourquoi ?) d'un endomorphisme autoadjoint positif de carré égal à u.
La preuve de l'unicité est plus délicate (et pourrait constituer une analyse préliminaire). Soit donc w répondant au problème. Puisque $w^2 = u$, on a $w \circ u = u \circ w$, donc les sous-espaces propres F_i de u sont stables par w. La restriction de w à chaque F_i est symétrique, donc diagonalisable. Le caractère positif de w (donc de ses restrictions) impose alors : $w|_{F_i} = \sqrt{\lambda_i}\mathrm{Id}_{F_i}$. La valeur de w est imposée sur chaque F_i, et la somme des F_i vaut E : ceci prouve l'unicité d'une éventuelle solution. ■

On a évidemment les versions matricielles du résultat précédent. La preuve de l'existence est encore plus simple (assez mécanique par orthodiagonalisation), mais la preuve de l'unicité nécessite un passage au géométrique : l'économie n'était que de façade.

3.5.2 Décomposition polaire

On donne à nouveau une version géométrique. Le lecteur pourra énoncer la version matricielle.

Proposition 28 — Décomposition polaire

> Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Il existe un unique couple $(f, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $u = f \circ s$ (avec $\mathcal{S}^{++}(E)$ qui désigne l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs).

Preuve : On va passer en matriciel, pour changer (il manque un outil géométrique : l'adjonction, alter ego de la transposition chez les matrices). Soit donc A la matrice de u dans une base orthonormée qu'on fixe. On cherche $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A = MS$.
ANALYSE : si une telle relation est vérifiée, alors nécessairement, $A^{\mathrm{T}}A = S^2$, donc S est obligatoirement l'unique « racine positive » de la matrice symétrique positive $A^{\mathrm{T}}A$ (voir l'exercice 26 et le paragraphe précédent). La valeur de S est donc imposée, donc également celle de $M = AS^{-1}$ (on a noté que nécessairement, S est inversible).
SYNTHÈSE : considérons la matrice $A^{\mathrm{T}}A$. Elle est symétrique positive, donc on peut trouver S symétrique positive telle que $S^2 = A^{\mathrm{T}}A$. Comme A est inversible, il en va de même pour S, et on peut donc poser $M = AS^{-1}$. On a alors évidemment $A = MS$, et il ne reste qu'à vérifier le caractère orthogonal de M : part de gâteau ! ■

3.5.3 Décomposition de Cholesky

Proposition 29 — Décomposition de Cholesky

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Il existe alors $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que $A = P^{\mathrm{T}}P$.

Preuve : Par récurrence, en travaillant par blocs ! On peut être coincé en fin de la preuve quand on se retrouve à résoudre (en α) une équation du type $C^{\mathrm{T}}C + \alpha^2 = a_{n,n}$. On peut s'en sortir en disant qu'il existe une solution a priori dans $\mathbb{C}$: en regardant le déterminant de A, on prouve alors que α est réel.
Une version plus jolie (mais qui peut donner un peu mal à la tête) consiste à se placer dans $\mathbb{R}^n$, et considérer la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}}AY$: il s'agit d'un produit scalaire. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ n'est a priori pas orthonormée, mais on peut l'orthonormaliser à la Schmidt. Si on note Q la matrice de passage de la base canonique vers la nouvelle base, alors Q est triangulaire supérieure. Maintenant, à quoi sont égales les matrices du produit scalaire (celui défini par A !) dans ces deux bases ? ■

On peut même montrer qu'il y a unicité, si on impose aux coefficients diagonaux de P d'être positifs.