Corrigé de l'épreuve CCMP Maths II PSI

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

1. Au programme de toutes les classes de première année, il y a le résultat suivant, démontré seulement pour les fonctions de classe C^1 :

   Théorème : *pour f continue sur le segment $[a,b]$,* $\displaystyle \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

   g étant continue et intégrable sur $]a,b[$, on applique ce théorème à f :

   $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

   puis on constate que

   $$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \frac{1}{n}f(a)\\ &\overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - 0\\ &= \int_a^b g(t)\mathrm{d}t\end{aligned},$$

   ce qui prouve bien que $g \in \mathcal{D}_{a,b}$.

2.
   - Pour tout $k \geq 1$,

     $$\begin{aligned} a_k - b_{k+1} &= \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2^{k+2}}\\ &= \frac{1}{k(k+1)}\left(1-\frac{k(k+1)}{2^{k+2}}\right)\end{aligned},$$

     et $\dfrac{k(k+1)}{2^{k+2}} \to 0$ quand $k\to\infty$ par croissance comparée : il existe k_0 tel que $\dfrac{k(k+1)}{2^{k+2}} < 1$ pour tout $k \geq k_0$. Il semble même que $k_0 = 1$ convienne.
   - On prend ici $k_0 = 2$.

     Les intervalles $[a_k, b_k]$, $k \geq 2$, chacun centré en $\dfrac{1}{k}$, forment une suite d'intervalles deux à deux disjoints de l'intervalle $]0,1[$, donc tout réel $t \in]0,1[$ appartient à au plus un de ces intervalles, sur chacun desquels f est bien définie (raccord de valeur k^2 en $t = \dfrac{1}{k}$). Donc f est bien définie sur $]0,1[$.
   - f est une fonction affine par morceaux, donc continue, sauf peut-être en les réels a_k et b_k.
     Or, $\forall k \geq 2$, $f(a_k) = 0 = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$ et $f(b_k) = 0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.
     Donc f est continue sur $]0,1[$.
   - f est prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), donc pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

     Ensuite, f est à valeurs positives, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ est décroissante sur $]0,1[$.

     Enfin, puisque $a_k \to 0$ quand $k\to\infty$, pour tout $x \in]0,1[$, il existe un entier p tel $a_p \leq x$, et

$$\begin{aligned}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t &\leq \int_{a_p}^1 f(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=p}^{2} \frac{1}{2^{k+1}}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \text{ puisque cette série converge.}\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to 0$, ce qui prouve que f est intégrable sur $[0,1]$.

- $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = n \to +\infty$ quand $n \to \infty$.

  Ainsi $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ n'admet pas de limite finie, et f n'appartient pas à $\mathcal{D}_{a,b}$.

3. ϕ est définie et continue sur $]0,1]$, et, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\int_x^1 \phi(t)\mathrm{d}t = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2(1-\sqrt{x}) \to 2 \text{ quand } x \to 0.$$

Donc ϕ est bien intégrable sur $]0,1[$.
Pour montrer que ϕ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$, on montre le résultat suivant, que l'on utilisera aussi dans la question suivante :

Théorème : *toute fonction f continue, intégrable, monotone et à valeurs positives sur l'intervalle $]a,b[$ appartient à $\mathcal{D}_{a,b}$.*

On fait la démonstration dans le cas où f est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par un principe classique de comparaison d'aires, pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant pour $k = 1 \dots n-1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t,$$

soit encore :

$$\frac{1}{b-a}\int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Quand $n \to \infty$, et puisque f est intégrable sur $)a,b[$, les membres de gauche et de droite de cette double inégalité tendent tous les deux vers $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, et donc, par encadrement, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.
Finalement, $f \in \mathcal{D}_{a,b}$.

On applique alors ce théorème à la fonction ϕ, qui est continue, intégrable, décroissante et à valeurs positives sur $]0,1[$, et appartient donc à $\mathcal{D}_{0,1}$.

4. $\widetilde{h}$ est dérivable et pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\widetilde{h}'(t) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{[t(1-t)]^{\frac{3}{2}}} \times (1-2t) \leq 0$: $\widetilde{h}$ est décroissante.

Ensuite, $\widetilde{h}$ est continue, à valeurs positives, et $\widetilde{h}(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to 0$. Par comparaison, on en déduit que $\widetilde{h}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Enfin, $\widetilde{h} \in \mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$ par le théorème démontré à la question précédente.

5. h est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, et le changement de variable $u = 1-t$, C^1 et strictement décroissant, transforme $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ en $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t$. Ces deux intégrales sont donc de même nature, convergentes, et finalement, h est intégrable sur $]0, 1[$.

   De plus, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t$, et

$$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \widetilde{h}(t)\mathrm{d}t.$$

6. Puisque $\widetilde{h} \in \mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) \to 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \text{ quand } n \to \infty.$$

   Or, puisque $h(1-t) = h(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} h\left(1 - \frac{k}{2n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right)\\ &= \sum_{k=2n-1}^{n+1} h\left(\frac{k}{2n}\right) \text{ par le changement d'indice } 2n-k \leftarrow k\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{2n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right)\right]\end{aligned}.$$

   Donc $\displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} h\left(\frac{2n-k}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \mathrm{o}(1) \to \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque h est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, et que $\dfrac{k}{2n} \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$h\left(\frac{k}{2n}\right) \leq h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right) \quad \forall k = 1 \dots n,$$

   et donc

$$\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \leq \frac{2(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right).$$

   Or $\displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{2n}\right) + \frac{1}{2n}h\left(\frac{1}{2}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$, et $\displaystyle\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2(n+1)}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$.

   Donc par encadrement, $\displaystyle\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) \to \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to \infty$.

   Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{2n} h\left(\frac{2n-(k-1)}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=n}^{1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)\\
&= 2.\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{2n+1}\right)\\
&\to 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}.$$

8. Si on note $S_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} h\left(\frac{k}{p}\right)$, le résultat de la question 6 prouve que la suite $(S_{2n})_n$ est convergente de limite $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$, et celui de la question 7 que la suite $(S_{2n+1})_n$ est convergente de limite $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$.
   Un résultat de cours permet de conclure que la suite $(S_p)_p$ est convergente de limite $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire, compte tenu de la continuité de h et de son intégrabilité obtenue à la question 5, que $h \in \mathcal{D}_{0,1}$.
9. On effectue dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ le changement de variable strictement croissant $u = \sqrt{t}$, soit $t = u^2$.
   Puisque $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left[\arcsin(u)\right]_0^1 = \pi$.
10. D'après la question 3, la fonction ϕ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$. Donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \text{ quand } n \to \infty,$$

   ce qui s'écrit encore :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \to 2.$$

   On en conclut que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$, puis, compte-tenu du fait que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

11. Puisque cette fois $h \in \mathcal{D}_{0,1}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \to \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t \text{ quand } n \to \infty,$$

   alors :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \to \pi.$$

12. Soit ϵ un réel strictement positif. Puisque $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |\epsilon_n| < \epsilon.$$

Pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} &= \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \\
&\leq \max(|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + \epsilon \times \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \\
&\leq \max(|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{\sqrt{n-n_0+1}} + \epsilon \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}
\end{aligned}.$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right)_n$ est convergente, elle est bornée, donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq M$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \max(|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \frac{n_0-1}{\sqrt{n-n_0+1}} + M\epsilon \ .$$

Le premier terme tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$, il existe un entier naturel non nul n_1 tel que :

$$\forall n \geq n_1, \quad \max(|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_{n_0-1}|) \times \frac{n_0-1}{\sqrt{n-n_0+1}} < \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} < (M+1)\epsilon$.

Cela prouve que $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_k|}{\sqrt{k(n-k)}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

13. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier i compris entre 1 et $n-1$,

$$\frac{(1+\epsilon_i)(1+\epsilon_{n-i})}{1+\epsilon_n} - 1 = \frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_n} + \frac{\epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} + \frac{\epsilon_i \epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} - \frac{\epsilon_n}{1+\epsilon_n}.$$

Puisque $\epsilon_n \to 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel, pour tout $n \geq n_2$, $1 + \epsilon_n \geq \frac{1}{2}$.

Donc $\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_i}{1+\epsilon_n}\right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} \to 0$ quand $n \to \infty$.

De la même façon, et puisque le changement d'indice $i \leftarrow n-i$ laisse inchangé $i(n-i)$, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} \to 0$.

La suite $(\epsilon_k)_k$ étant bornée, on majore dans le troisième terme $|\epsilon_i \epsilon_{n-i}|$ par $m \times |\epsilon_i|$, et on en déduit que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_i \epsilon_{n-i}}{1+\epsilon_n} \to 0$.

Enfin, $\left|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \frac{\epsilon_n}{1+\epsilon_n}\right| \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \times |\epsilon_n| \to 0$.

2 Une étude de marche aléatoire

14. Pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $\frac{1+X_n}{2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Elle suit donc une loi de Bernoulli.
La probabilité que $\frac{1+X_n}{2}$ vaille 1 est la probabilité que X_n égale 1, soit $\frac{1}{2}$.

15. Pour tout $i = 1 \dots n$, A_i est l'évènement "le $2i$-uplet $(X_1, \dots, X_{2i})$ comporte le même nombre de -1 que de 1".
Or il y a $\binom{2i}{i}$ $2i$-uplets de -1 et de 1 comportant autant de -1 que de 1, et pour chacun de ces $2i$-uplets, la probabilité que $(X_1, \dots, X_{2i})$ lui soit égal vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$.
Finalement, $\mathbb{P}(A_i) = \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$.

16. Notons Y_n la variable aléatoire égale à $\mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid X_i = 1\}$, et Z_n la variable aléatoire égale à $\mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid X_i = -1\}$.
Alors $Y_n + Z_n = n$ et $S_n = Y_n - Z_n$.
Ainsi $n - S_n = 2Z_n$ est à valeurs dans $2\,\mathbb{N}$.
On en déduit que, si $l - n$ est impair, $(S_n = l)$ est l'évènement impossible, et $\mathbb{P}(S_n = l) = 0$.
Lorsque $l = n - 2p$, où p est un entier naturel, l'évènement $(S_n = l)$ est l'évènement $(Y_n = n - p)$, de probabilité $\binom{n}{n-p} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{p} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{\frac{n+l}{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

17. Le fait que la série $\sum_n d_n$ diverge est un résultat de cours.
Ensuite, $c_n \sim d_n$ équivaut à $d_n - c_n = \mathrm{o}(c_n)$. Comme la série $\sum_n c_n$ est à termes positifs et divergente, le théorème admis dans l'énoncé permet d'écrire que :
$$\sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) = \mathrm{o}(\sum_{k=1}^{n} c_k),$$
ce qui prouve que
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \sim \sum_{k=1}^{n} d_k \text{ quand } n \to \infty.$$

18. N_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. C'est donc une variable aléatoire finie, qui possède nécessairement une espérance.
Pour le calcul de $\mathbb{E}(N_n)$, on note χ_{A_i} la variable aléatoire qui vaut 1 si l'évènement A_i est réalisé, et 0 sinon.
On remarque alors que $N_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$, et on en déduit que
$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}.$$

19. On utilise la formule de Stirling rappelée dans le préambule, puis la question 17.
Déjà, $\binom{2i}{i} = \frac{(2i)!}{(i!)^2} \sim \frac{2\sqrt{i\pi}\left(\frac{2i}{e}\right)^{2i}}{2i\pi\left(\frac{i}{e}\right)^{2i}} = \frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}}$.
Ainsi, $\binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \sim \frac{2^{2i}}{\sqrt{i\pi}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{1}{\sqrt{i\pi}}$.
La série $\sum_i \sum_{i=1}^{n} \binom{2i}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$ est bien divergente, par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$, et sa somme partielle d'indice n, à savoir $\mathbb{E}(N_n)$ est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$.
La question 10 permet alors d'assurer que
$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

20. L'urne contenant au départ autant de boules blanches que de boules noires, un indice d'égalité est nécessairement pair.
Comme à la question 18, on utilise les fonctions indicatrices des évènements B_i : χ_{B_i} vaut 1 si i est un indice d'égalité, 0 sinon. En particulier, $\chi_{B_{2j+1}} = 0$ pour tout entier j. On remarque alors que $M_n = \sum_{i=1}^{2n} \chi_{B_i} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_{2j}}$.
On en déduit que $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2j})$.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on calcule $\mathbb{P}(B_{2j})$ par dénombrement :
   — un tirage est en général un $2n$-uplet de blanc et de noir, comportant n boules blanches : il y a $\binom{2n}{n}$ possibilités de placer les boules blanches, et donc le cardinal de tous les résultats possibles est $\binom{2n}{n}$.
   — un tirage favorable est en particulier un tirage dont les $2j$ derniers éléments sont constitués de j boules blanches et de j boules noires. Il y a $\binom{2j}{j}$ possibilités de placer les boules blanches ...
   — un tirage favorable est aussi un tirage dont les $2(n-j)$ premiers éléments sont constitués de $jn-j$ boules blanches et de $n-j$ boules noires. Il y a $\binom{2(n-j)}{n-j}$ possibilités de placer les boules blanches.

Finalement, $\mathbb{P}(B_j) = \dfrac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}}$, et

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}}.$$

21. On utilise encore Stirling : on rappelle que l'on a démontré à la question 19 que $\binom{2j}{j} \sim \dfrac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}$ quand $j \to \infty$. Donc il existe une suite $(\epsilon_j)_j$ de réels, convergente de limite nulle, telle que :

$$\binom{2j}{j} = \frac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}(1+\epsilon_j).$$

On remplace alors dans l'expression de $\mathbb{E}(M_n)$ obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\binom{2j}{j}\binom{2(n-j)}{n-j}}{\binom{2n}{n}} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\dfrac{2^{2j}}{\sqrt{j\pi}}(1+\epsilon_j)\dfrac{2^{2(n-j)}}{\sqrt{(n-j)\pi}}(1+\epsilon_{n-j})}{\dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}(1+\epsilon_n)} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{n}{\pi}}.\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j(n-j)}}.\frac{(1+\epsilon_j)(1+\epsilon_{n-j})}{1+\epsilon_n}\end{aligned}.$$

Pour simplifier, notons $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{j(n-j)}}.\dfrac{(1+\epsilon_j)(1+\epsilon_{n-j})}{1+\epsilon_n}$ et $\Sigma_n = \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{j(n-j)}}$.
Alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\Delta_n - \Sigma_n) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma_n \to 0 + 0 + \sqrt{\pi}$ d'après les questions 13 et 11, et

$$\mathbb{E}(M_n) \sim \sqrt{\pi n} \text{ quand } n \to \infty.$$

OUF !

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le but ultime du sujet était d'étudier un équivalent du nombre de retours à zéro sur n pas, dans deux situations :

- une marche aléatoire symétrique (questions **14** à **19**) ;
- un tirage sans remise dans une urne initialement équilibrée (questions **20** et **21**).

Afin d'obtenir lesdits équivalents, il était nécessaire de disposer de plusieurs résultats de comportement asymptotique de sommes, notamment :

- un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **10**, directement liée à la question **3**) ;
- un équivalent de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **11**), qui s'avère être une constante non nulle ;
- et enfin une généralisation du deuxième équivalent (question **13**).

Ces résultats sur les équivalents de sommes s'avèrent relever du même principe général : un théorème sur les sommes de Riemann, adapté à des fonctions intégrables sur un intervalle ouvert borné. Une difficulté majeure est que l'hypothèse d'intégrabilité ne suffit pas à assurer la convergence de sommes de Riemann, même régulières, vers l'intégrale : un contre-exemple était étudié à la question **2**. En revanche, il est classique que des hypothèses de monotonie au voisinage des bornes de l'intervalle, en plus bien sûr de l'intégrabilité, suffisent à assurer la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale. Dans le sujet, on se limitait à deux exemples simples : la fonction $t \mapsto t^{-1/2}$ sur $]0,1[$ (question **3**), et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ sur ce même intervalle (questions **4** à **8**).

1.7.2 Structure du sujet

Le sujet était constitué de deux parties à thèmes bien distincts : la première partie utilisait de façon quasi exclusive les techniques sur les intégrales, tandis que la seconde faisait appel aux raisonnements probabilistes, avec quelques questions de calcul asymptotique. Plusieurs résultats de la partie **1** intervenaient dans la partie **2**, et seules les toutes premières questions de la partie **2** pouvaient être traitées de façon entièrement autonome.

Remarques générales sur la présentation et la rédaction

Le jury déplore une nouvelle fois que la présentation des copies soit souvent négligée. Orthographe et syntaxe sont souvent défaillantes. Trop peu de candidats font l'effort d'organiser clairement leur argumentation avec des paragraphes bien découpés, des formules encadrées, etc. La rigueur est trop régulièrement absente dans le discours sur les objets : confusions innombrables entre la fonction f et la valeur $f(x)$, usage de la notation $f(x)'$ dénuée de sens, etc. Enfin, et comme signalé dans les rapports précédents, on attend un surcroît de rigueur de la part des candidats lorsqu'ils utilisent un résultat établi antérieurement dans le sujet : il faut qu'ils s'astreignent systématiquement à faire une référence précise à la question où ledit résultat a été démontré.

1.7.3 Remarques sur les difficultés rencontrées

Ce problème a dans l'ensemble été fort mal réussi par les candidats. Beaucoup d'entre eux sont parvenus uniquement à résoudre les parties les plus élémentaires des questions, très proches du cours, et n'ont presque jamais réussi à traiter une question en profondeur. Notamment, peu de candidats ont compris l'esprit de la première partie, à savoir un recours quasi systématique à la comparaison somme-intégrale pour une fonction monotone : il est possible d'ailleurs que des candidats aient été étonnés d'avoir à utiliser la même technique à trois reprises, et aient voulu chercher dans d'autres directions. Quoi qu'il en soit, il est visible que bien des candidats ont été désarçonnés de ne rester qu'en surface pour les questions **2** à **7**, allant jusqu'à perdre complètement de vue la structure argumentative de cette partie : ainsi, le jury a été étonné par la très faible proportion de copies identifiant un simple raisonnement sur la convergence d'une suite fondé sur la séparation selon les termes de rang pair et les termes de rang impair, ce qui est pourtant un schéma classique (question **8**).

Chez bon nombre de candidats, on note une différence très sensible de performance entre la partie « intégrales » et la partie « probabilités ».

Certains semblent assez à l'aise avec les intégrales généralisées, et très maladroits avec les probabilités, et d'autres présentent le défaut inverse.

Quant au traitement des questions de probabilités, on doit signaler le peu de soin avec lequel beaucoup de candidats traitent les variables aléatoires.

On lit trop souvent des raisonnements abusifs comme « $X_n = 1$ ou $X_n = -1$ », révélant une confusion entre la variable X_n (qui est une fonction), et ses réalisations. De tels raisonnements doivent être impérativement formalisés par retour à une issue (on fixe ω dans l'univers Ω et on raisonne sur $X_n(\omega)$).

Trop de candidats dédaignent la discipline voulant qu'invoquer un théorème nécessite d'en vérifier les hypothèses.

Les candidats étaient confrontés à une difficulté classique, qui réside dans le degré de crédibilité qu'on peut accorder aux réponses intuitives en probabilités, dans un cadre où le sujet fournit un formalisme parfaitement rigoureux du problème. En particulier, pour résoudre une question telle que les questions **15** et **16**, les candidats doivent s'astreindre autant que possible à s'appuyer sur le formalisme des variables aléatoires développé par l'énoncé plutôt que d'agiter des raisonnements intuitifs.

En revanche, quand aucun formalisme clair n'est fourni dans l'énoncé, comme dans la question **20**, une réponse intuitive peut rapporter la totalité des points à condition que le candidat fasse des efforts d'explication (très) conséquents, d'autant plus que le résultat est ici donné.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe F.

1.7.4 Ultimes conseils aux futurs candidats

Terminons comme toujours par réitérer quelques conseils importants pour les futurs candidats.

- Maîtriser parfaitement son cours.
- Être très attentif à la précision de l'énoncé.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. Beaucoup de candidats ont réussi à avoir une note tout à fait satisfaisante en ne traitant que cinq ou six questions (mais en profondeur).

- Les tentatives de picorage désespéré sur les questions tardives sont le plus souvent vouées à l'échec et irritent les correcteurs.