Samedi 5 décembre 2020 – 4 heures

Vous pouvez vérifier *vos calculs à la calculatrice, mais vous devez les* expliciter *sur la copie.*

1 Valeurs propres de matrices stochastiques

Soient m, n, p, q, r, s des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Question préliminaire

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général $a_{i,j}$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général $b_{i,j}$.
   (a) À quelle condition sur p, q, r, s le produit AB est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (b) On suppose cette condition vérifiée, et on note $c_{i,j}$ le terme général de la matrice AB. Exprimer $c_{i,j}$ en fonction des $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.
2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p. On dit que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
   (a) Montrer que si la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A et la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. On note :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$

   Calculer D^n, puis montrer que $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *On donnera une expression explicite de la limite.*
5. Montrer qu'il existe un unique vecteur ligne (qu'on explicitera) $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que :
   — $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$;
   — $a + b + c = 1$;
   — $\pi A = \pi$
   NDLR : faites un brouillon, merci ! Idéalement, j'aimerais voir les calculs. Mais si vous racontez ce que vous avez demandé à la calculatrice, c'est déjà ça...

Partie II

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante :

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.
2. Soit p un entier strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que :
   $$X^p = PQ + \alpha_p X + \beta_p.$$
   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.
   (c) En déduire une expression de B^p.
3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie III

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** lorsque :

— pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:
$$m_{i,j} \geqslant 0;$$
— la somme des termes de chaque ligne vaut 1, c'est-à-dire, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:
$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1.$$

1. Soit M une matrice stochastique. Montrer que pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:
   $$m_{i,j} \leqslant 1.$$
2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.
   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels positifs. Montrer que si X_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.
   (c) En déduire que le produit de deux matrices sochastiques est stochastique.
3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i| = 1$.
   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$. Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:
   $$|y_i| \leqslant 1.$$
   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :
   $$|\lambda| \leqslant 1.$$
   (c) Montrer que les valeurs propres de M sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

2 Fonctions ζ et ζ alternée

On va faire ici une étude croisée de quelques propriétés des fonctions ζ et F (« ζ alternée ») définies par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et (pour $x > -1$) :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Mise à part la partie **III** qui utilise des résultats de la partie **I**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

   (a) Déterminer la limite simple g de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Y a-t-il convergence uniforme ?

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 |g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, puis que $F(1) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*

   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

   (b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\,\zeta(x).$$

   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n$, où $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k}$.

Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

1. *Étude de la convergence*
   (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.
   (b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
   En déduire, pour $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.
2. *Cas où* $x = 1$
   On suppose, dans cette question, que $x = 1$.
   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$.
   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$.