Équations différentielles linéaires

« If I were to awaken after having slept for a thousand years, my first question would be : "has the Riemann hypothesis been proven ?". » – David Hilbert

Table des matières

1 Les équations « de première année » 2
1.1 Principes de superposition . . . 2
1.2 Ordre 1 . . . 2
1.3 Ordre 2 (cas homogène, coefficients constants) . . . 3
1.4 Seconds membres particulier à l'ordre 2 (coefficients constants) . . . 4

2 Équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus 5

3 Questions diverses 5
3.1 Problèmes de raccord . . . 5
3.2 À l'ordre n (pas précisément au programme, mais...) . . . 7
3.3 Abaissement de l'ordre . . . 7

FIGURE 1 – $y'' + ay' + by = c$ avec $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$

1 Les équations « de première année »

1.1 Principes de superposition

Commençons par ces remarques essentielles. Très simples, mais aux conséquences souvent mal comprises... Elles sont écrites à l'ordre 2, mais sont évidemment aussi vraies à l'ordre 1 ou tout ordre $\geqslant 3$. De même, les coefficients en jeu peuvent être constant ou non ($a = 42$ ou $a : t \mapsto \mathrm{e}^t$).
Tout d'abord, si

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = 0 \quad \text{et} \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$(\lambda y_1 + y_2)'' + a(\lambda y_1 + y_2)' + b(\lambda y_1 + y_2) = 0$$

Bref : **l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel** (un sous-espace de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$ selon contexte). (Et bien entendu c'est l'ensemble qui est un espace, pas chaque fonction y_1 ou encore chaque réel $y_1(t)$, bien entendu...)
De même, si

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = c \quad \text{et} \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

alors

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = c$$

et encore mieux, toujours sous l'hypothèse $y_1'' + ay_1' + by_1 = c$, alors

$$y'' + ay' + by = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y - y_1)'' + a(y - y_1)' + b(y - y_1) = 0$$

Bref : **LES solutions d'une équation différentielle linéaire s'obtiennent en choisissant/trouvant UNE solution particulière et en lui ajoutant LES solutions de l'équation homogène associée.**
Tout le monde peut comprendre (mais VRAIMENT !) cette phrase, en la lisant lentement.
Enfin, si

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = c_1 \quad \text{et} \quad y_2'' + ay_2' + by_2 = c_2$$

alors

$$(y_1 + y_2)'' + a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = c_1 + c_2$$

Bref : **pour trouver une solution particulière avec un second membre qui est une somme, il suffit de trouver une solution de l'équation différentielle avec chacun des deux termes dans le second membre, puis de faire la somme.**
Tout le monde peut comprendre (mais VRAIMENT !) cette phrase, en la lisant lentement.

1.2 Ordre 1

PROPOSITION 1 — Équations différentielles linéaires d'ordre 1

> Soit a une application continue de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
> — Si A est **une** primitive de a, alors **les** solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont **les** applications
> $$t \mapsto K\mathrm{e}^{-A(t)},$$
> où K décrit $\mathbb{K}$.
> — Si b est une autre application continue de I dans $\mathbb{K}$ et $t_0 \in I$, alors **les** solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont **les** applications de la forme
> $$t \mapsto \left(K + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{e}^{A(u)}du\right)\mathrm{e}^{-A(t)},$$
> où K décrit $\mathbb{K}$.

REMARQUES :
— NON, pour les erreurs de signe vous n'aurez pas l'excuse du « Ben j'avais appris la formule pour $y' = ay$ et pas pour $y' + ay = 0$ » – ou vice-versa. C'est comme pour les calculs de primitives : on vérifie systématiquement (de tête ou au brouillon) que sa candidate solution en est bien une. C'est facile pour peu qu'on sache dériver $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$...

— Lorsque a est constante, on évitera une longue rédaction au sujet d'une primitive de je ne sais quoi. On connaît les solutions, et basta. On distinguera bien entendu a, $a(t)$, at, $A(t)$ ou encore A. *Bien entendu...*
— En pratique, il n'est pas exigé (ni interdit !) de connaître la formule dans le cas non homogène : on peut la retrouver par « variation de la constante » : après avoir déterminé les solutions de l'équation homogène, on prend K UNE fonction, on pose $y(t) = K(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ (SANS SUPPOSER y solution de l'équation différentielle) ; on écrit deux ou trois ÉQUIVALENCES qui nous disent que y est solution de (E) si et seulement si K' est égale à telle chose. On met un POINT pour terminer les équivalences, et on écrit que pour avoir $K' = ...$, il SUFFIT de prendre $K : t \mapsto ...$ On a alors y qui est UNE solution particulière de (E). *Si vous avez réellement compris ce raisonnement, je vous invite à le refaire à chaque fois. Sinon, apprenez.*
— On évitera la petite blague récurrente « on prend pour K une primitive de K' ». Si vous ne comprenez vraiment pas pourquoi c'est absurde, c'est fâcheux mais retenez tout de même que c'est absurde.
— On ne parlera jamais de « LA primitive de... ».
— NON, on ne trouvera jamais une primitive de $a(t)$. Pour cela, il faudrait que $a(t)$ soit une fonction, ce qui est hautement improbable.
— NON, $A(t)$ n'est pas une primitive. Pour cela, il faudrait que $A(t)$ soit une fonction, ce qui est hautement improbable.

Une conséquence simple du résultat précédent (que le ~~client~~ lecteur est invité à établir) est la suivante :

Proposition 2 — Pour rassurer les physiciens (qui n'en n'ont pas besoin)

Soient a et b deux applications continues de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution

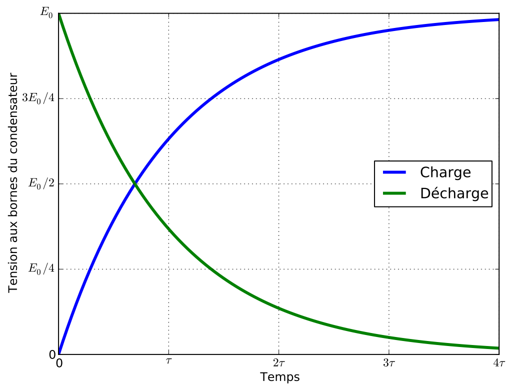

Figure 2 – $U' + \dfrac{1}{\tau}U = \dfrac{1}{\tau}E_0$ puis $U' + \dfrac{1}{\tau}U = 0$ (zoomez sur le pdf si vous avez un doute !)

1.3 Ordre 2 (cas homogène, coefficients constants)

Exercice 1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est-elle solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$?*

Exercice 2. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour quels $\lambda \in \mathbb{C}$ l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est-elle solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$?*

Exercice 3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que l'équation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ possède deux racines distinctes complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Exhiber* ***des*** *solutions* ***réelles*** *non nulles de l'équation $y'' + ay' + by = 0$.*

Proposition 3 — Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 – coefficients constants

> Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation différentielle
>
> $$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E)$$
>
> — Si l'équation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ possède deux racines **distinctes** λ_1 et λ_2, alors les solutions complexes de (E) sont les applications de la forme
>
> $$t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$
>
> où $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.
>
> — Si l'équation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ possède une racine **double** λ_0, alors les solutions complexes de (E) sont les applications de la forme
>
> $$t \mapsto (K_1 + K_2 t) e^{\lambda_0 t}$$
>
> où $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$.

Remarques :

— Supposons $a, b \in \mathbb{R}$. Pour trouver les solutions réelles, on demande aux constantes K_1, K_2 de décrire $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{C}$). De plus, dans le cas de deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, les solutions réelles seront les $t \mapsto e^{\alpha t}\left(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)\right)$ (voir l'exercice précédent, et c'est bien dommage si vous ne l'avez pas fait...).

— Ici encore, on peut montrer qu'il y a existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(t_0) = c \\ y'(t_0) = d \end{cases}$

Par contre ni l'existence ni l'unicité n'est acquise si on prend deux conditions telles que $\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(t_0) = c \\ y(t_1) = d \end{cases}$

— En électricité (ou mécanique), le « régime libre » va correspondre aux équations homogènes (on laisse la capacité se décharger dans la résistance) et le « régime forcé » celui obtenu avec un second membre non nul (un générateur impose une tension ou une intensité).

— Un théorème important d'électricité dit que si les solutions « divergent » (attention, pas au sens du matheux (pour qui le cosinus diverge) mais au sens du physicien : le module n'est pas bornée), alors il y aura une petite fumée sur le circuit ; voir aussi la photo illustrant la page de garde de ce poly (et la fumée était alors plus grosse) ; la version mécanique est : « proutch le pont ». Il n'est donc pas sans intérêt, face à une équation différentielle, de s'intéresser au comportement asymptotique des solutions : c'est le « régime établi» (ou *permanent*), qui arrive **très précisément** à la fin du « régime transitoire ».

1.4 Seconds membres particulier à l'ordre 2 (coefficients constants)

« S'il y a un second membre » (au sens : non nul), on devra vous guider pour trouver une solution particulière, à l'exception du cas où ce second membre est une combinaison d'exponentielles, de cosinus et de sinus. Voyons tout de même un résultat un peu plus satisfaisant.

Proposition 4 — Second membre en $P(t)e^{\lambda t}$ – partiellement H-P, mais pas complètement !

> Si $a, b \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $X^2 + aX + b$ de multiplicité $m \in \{0, 1, 2\}$ ($m = 0$ si λ n'est pas racine !), alors l'équation $y'' + ay' + by = P(t)e^{\lambda t}$ possède une solution de la forme $t \mapsto t^m Q(t) e^{\lambda t}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ de même degré que P.

En pratique :

— Si $\lambda = 0$, on cherche une solution polynomiale.

— Pour un second membre de la forme $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$, on peut le voir comme une combinaison de $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$... ou retenir [1] qu'il existe une solution de la forme $t \mapsto t^m \left(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\right)$ avec $m = 1$ ou 0 selon que $i\omega$ est ou n'est pas racine de $X^2 + aX + b$...

Exemples : Prenons les équations $y'' + 4y = \sin t$ et $y'' + 4y = \cos(2t)$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \{t \mapsto K_1 e^{2it} + K_2 e^{-2it},\ K_1, K_2 \in \mathbb{C}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \{t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(-2t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

1. Encore une boîte noire au programme ; mouais...

— On cherche une solution de la première sous la forme $y_1(t) = a\cos t + b\sin t$. Une telle fonction vérifie $y_1'' + 4y_1 = 3a\cos t + 3b\sin t$, donc il SUFFIT de prendre $a = 1/3$ et $b = 1/3$ pour obtenir une solution particulière : $t \mapsto \frac{1}{3}\sin t$.

— Pour la deuxième équation, on cherche une solution sous la forme $y_2(t) = at\cos(2t) + bt\sin(2t)$. Une telle fonction vérifie (noter comment sont menés les calculs...) $y_2' = (a+2bt)\cos(2t) + (-2at+b)\sin(2t)$ puis $y_2'' = (2b + 2b - 4at)\cos(2t) + (-2a - 2a + 4bt)\sin(2t)$ donc

$$y_2'' + 4y_2 = 4b\cos(2t) - 4a\sin(2t),$$

donc il SUFFIT de prendre $a = 0$ et $b = 1/4$, fournissant la solution : $t \mapsto \frac{1}{4}t\sin(2t)$.

2 Équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus

Théorème 1 — *de Cauchy linéaire – coefficients continus*

Si $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

On retrouve évidemment une structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Proposition 5 — $\mathcal{S}_H$ dans le cas scalaire d'ordre 2

Si $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, alors les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ constituent un sous-espace de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

Notons qu'on dispose d'un outil (hors-programme, mais que vous pouvez rencontrer à diverses occasions) pour savoir si deux solutions constituent une base de $\mathcal{S}_H$.

Exercice 4. Wronskien – « réflexions sur la liberté »
Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$. On note $w = y_1y_2' - y_1'y_2$.

1. *Que dire de w si (y_1, y_2) est liée (dans $\mathcal{S}_H$) ?*
2. *On suppose : $w(t_0) = 0$ pour un certain $t_0 \in I$. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$ sont liés. En considérant un bon problème de Cauchy, montrer que (y_1, y_2) est liée.*

Exercice 5. *En calculant w', prouver d'une seconde façon[2] que si w s'annule, alors w est uniformément nul.*

3 Questions diverses

3.1 Problèmes de raccord

Dans ce paragraphe, il n'y a toujours pas de résultat spécifiquement au programme ; juste quelques considérations théoriques et pratiques sur le problème des équations « non résolues », c'est à dire de la forme $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, avec a s'annulant en un point t_0.
La théorie ne s'applique que pour les équations de la forme $y'(t) = \alpha(t)y(t) + \beta(t)$; donc dans le cas non résolu, on commence par résoudre les équations dans les intervalles où a ne s'annule pas, puis on essaie de « recoller » les solutions au sens suivant (attention, la rédaction doit être méticuleuse).
On se place ici dans le cas où a ne s'annule qu'en 0.

1. On résout $ay' + by = c$ sur $I_1 =]-\infty, 0[$; on trouve un ensemble de solutions $\mathcal{S}_1$.

2. Relisez mieux l'exercice précédent !

2. On résout $ay' + by = c$ sur $I_2 =]0, +\infty[$; on trouve un ensemble de solutions $\mathcal{S}_2$.
3. Pour la résolution sur $\mathbb{R}$, on fait une analyse-synthèse.
   — **Analyse :** supposons que y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. On a alors $y|_{I_1} \in \mathcal{S}_1$ et $y|_{I_2} \in \mathcal{S}_2$; ce qui donne la forme nécessaire de y sur $\mathbb{R}^*$. En regardant droit dans les yeux l'équation initiale, on peut trouver la forme nécessaire de $y(0)$ (si l'équation ne la donne pas, invoquer le fait que $y(t)$ tend vers $y(0)$ lorsque t tend vers 0^+).
   — **Synthèse :** prenons y de la forme imposée par l'analyse (il peut y avoir entre 0 et deux degrés de liberté) et regardons si y est solution de l'équation.
     — y est clairement dérivable et vérifie l'équation sur I_1 ;
     — même chose sur I_2.
     — La seule chose à vérifier est que y est effectivement dérivable en 0. Ce point est **vraiment** à vérifier : parfois, on constatera que ce n'est pas le cas, ce qui conduira à éliminer quelques « candidates-solution » qui avaient été jugées admissibles à l'issue de l'analyse.

Parfois, dans la phase d'analyse, on peut déjà utiliser la continuité/dérivabilité de y pour imposer des conditions sur les constantes intervenant dans les différentes expressions. Cela peut réduire le nombre d'admissibles, donc diminuer le temps des oraux (simplifier la synthèse !) mais certainement pas s'y substituer.

Exercice 6. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ (en raccordant en 0...) l'équation $t^3y' = 2y$.*

Solution : Sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$, l'équation est équivalent à $y' = \frac{2}{t^3}y$. L'application $a : t \mapsto \dfrac{2}{t^3}$ possède pour primitive l'application $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$, donc les solutions sont $\mathcal{S}_1 = \{t < 0 \mapsto K\mathrm{e}^{-1/t^2} \,|\, K \in \mathbb{R}\}$.

De même sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$, on trouve comme ensemble de solutions : $\mathcal{S}_2 = \{t > 0 \mapsto K\mathrm{e}^{-1/t^2} \,|\, K \in \mathbb{R}\}$.

— **Analyse :** supposons que y est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. On a alors $y|_{I_1} \in \mathcal{S}_1$ et $y|_{I_2} \in \mathcal{S}_2$, donc il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t < 0$, $y(t) = K_1\mathrm{e}^{-1/t^2}$ et pour tout $t > 0$, $y(t) = K_2\mathrm{e}^{-1/t^2}$. Par ailleurs, l'équation $t^3y' = 2y$ impose : $0 = 2y(0)$.

— **Synthèse :** fixons $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, et définissons y sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \begin{cases} K_1\mathrm{e}^{-1/t^2} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ K_2\mathrm{e}^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(il y a ici deux degrés de liberté) et regardons si y est solution de l'équation.
  — y est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_1 et vérifie $t^3y' = 2y$ sur cet intervalle ;
  — même chose sur I_2.
  — On montre sans trop de mal (normalement...) que y est continue en 0, puis dérivable en 0 ; et même $\mathcal{C}^1$ (en fait $\mathcal{C}^\infty$), avec évidemment $t^3y' = 2y$ vérifiée en $t = 0$ grâce à la valeur de y en 0 (on se fiche de $y'(0)$).

Finalement, les solutions de $t^3y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$ sont les applications : $t \mapsto \begin{cases} K_1 \mathrm{e}^{-1/t^2} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ K_2 \mathrm{e}^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ où (K_1, K_2) décrit $\mathbb{R}^2$.
Il s'agit d'un espace de dimension 2 ; sauriez-vous en déterminer une base ?

Exercice 7. *Résoudre (en raccordant en 0...) les équations suivantes :*
1. $t^2 y' = y$;
2. $ty' = y$;
3. $|t|\, y' = y$;
4. $t^2 y'(t) - (2t-1) y(t) = t^2$.

3.2 À l'ordre n (pas précisément au programme, mais...)

Rien de particulier au programme, mais si on a bien compris le paragraphe précédent, les résultats s'étendent facilement.

Exercice 8. *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des complexes tous distincts. Montrer que les applications $t \mapsto \mathrm{e}^{i\lambda_k t}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ constituent une famille libre.*

Exercice 9. *On suppose que la polynôme $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ possède n racines distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrer que l'équation différentielle*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

possède comme base de solutions les applications $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}$.

L'exercice suivant raconte/généralise cette sombre histoire de racine double pour les équations différentielles d'ordre 2. Si vous n'avez pas fait la vérification en première année, traitez d'abord cet exercice en prenant $n = 2$.

Exercice 10. *On suppose que le polynôme de l'exercice précédent possède λ_0 comme racine double. Montrer que l'application $t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ est également solution de l'équation différentielle.*

Et voici le couronnement de nos efforts :

Exercice 11. *Donner une base des solutions de l'équation différentielle*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

dans le cas général, à l'aide des racines complexes de $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et de leur multiplicités.

3.3 Abaissement de l'ordre

Il s'agit de faire une remarque au départ purement calculatoire, mais qui a quelques conséquences pratiques.

Exercice 12. *On suppose que y_0 est solution de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ sur un intervalle I (p et q sont des application continues sur I).*
1. *On suppose que K est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et on définit une nouvelle application $z : t \mapsto y_0(t) K(t)$. Calculer $z'' + pz' + qz$.*
2. *Comment peut-on utiliser cela dans la résolution de l'équation homogène ?*
3. *Comment utiliser cela dans la résolution de l'équation avec second membre $y'' + py' + qy = r$?*