



À rendre au plus tard le mardi 24 février 2026

Ce sujet est constitué de trois mini-problèmes/gros exercices. Cherchez et rédigez soigneusement (mais de façon tonique, sans longueurs excessives) au moins deux de ces trois exercices. Traiter les trois est tout à fait possible sans y passer un temps invraisemblable.

1 Un calcul de distance

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Q 1. Soient P et Q deux éléments de E .

On note : $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, où $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

Q 2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

2.a. Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

2.b. Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Q 3. Quelques calculs de sommes

3.a. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

3.b. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3.c. Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.d. Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.e. Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0 , S_1 et S_2 .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

Q 4. On cherche à calculer la distance du vecteur X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire défini dans la question 2

4.a. Déterminer les réels a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à 1 et à X .

4.b. Prouver que l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

4.c. En déduire la distance recherchée.

2 Polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H'_n$.

Q 5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n .

Q 6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Q 7. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

7.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.

7.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q 8. Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

8.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$.

8.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

8.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i ($0 \leq i \leq 3$) tels que $P = \sum_{i=0}^3 a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

Q 9. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n , $a_1, a_2, \dots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \text{ et } S = \prod_{i=1}^p (X - a_i) \text{ sinon.}$$

9.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S | H_n \rangle = 0$.

9.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

9.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

3 Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

Q 10. Justifier que l'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente.

Q 11. Montrer que l'application $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

Q 12. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

Q 13. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

Q 14. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 15. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Q 16. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q 17. Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q 18. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q 19. Justifier que P_k est de degré k .

Q 20. Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q 21. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$.

Q 22. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

Q 23. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q18** et **Q22**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

Q 24. Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q 25. En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

Q 26. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$