1 Algèbre linéaire : PT 2013 - sujet A

Question préliminaire

1. (a) D'après le tout premier cours de première année sur les matrices :
$$\boxed{AB \text{ est défini si et seulement si } q = r\,;\text{ et on a alors } AB \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{C}).}$$
   (b) Toujours d'après ce cours de première année :
$$\boxed{\text{Pour tous } i, j \text{ tels que } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant s, \text{ on a } c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell} b_{\ell,j}}$$
2. (a) Sous les hypothèses de l'énoncé, et on notant $c_{i,j}^{(k)}$ le terme général de $C_k = A_k + B_k$, on a, à i et j fixés dans $[\![1, n]\!]$:
$$c_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)} + b_{i,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j},$$
   avec $c_{i,j}$ le terme général de $C = A + B$. Ceci est vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, donc on a :
$$\boxed{A_k + B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A + B}$$
   (b) Pour le produit, c'est à peine moins évident, puisque cette fois c'est une somme de n produits de deux termes qui convergent qu'on obtient. Les théorèmes de première/terminale nous assurent que cette somme est convergente :
$$c_{i,j}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell}^{(k)} b_{\ell,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{\ell=1}^{q} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j},$$
   avec $c_{i,j}$ le terme général de $C = AB$. Ceci est vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, donc on a :
$$\boxed{A_k B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AB}$$
   Remarque : On rappelle une fois de plus que les théorèmes dont on parle racontent D'ABORD qu'il y a une limite, avant de dire ce qu'elle vaut – contrairement à ce que vous laisse en général penser la notation « lim = ».

Partie I

1. On *constate* que $AX_1 = X_1$, et puisque X_1 est **non nul** :
$$\boxed{X_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ (associé à la valeur propre 1).}}$$
2. On peut calculer le polynôme caractéristique de A (il sera de degré 3 et on en connaît déjà une racine, donc on saura trouver les autres racines). On commence par l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ qui préserve le déterminant et fait apparaître un zéro, avant de développer par rapport à la dernière colonne :
$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1/2 & -1/2 \\ -3/4 & X & -1/4 \\ -1/8 & -7/8 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1/2 & 0 \\ -3/4 & X & -1/4 - X \\ -1/8 & -7/8 & X + 7/8 \end{vmatrix} \\ &= (X + 7/8)\left(X^2 - 3/8\right) + (X + 1/4)\left(-7/8X - 1/16\right) \\ &= X^3 + X^2\,(7/8 - 7/8) + X\,(-3/8 - 1/16 - 7/32) - 21/64 - 1/64.\end{aligned}$$
   Puis :
$$\chi_A = X^3 - \frac{21}{32}X - \frac{11}{32} = (X - 1)\left(X^2 + X + \frac{11}{32}\right)$$
   Puisque les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{1\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\left\{1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{8}\right\}}$$

Pour que A soit diagonalisable, il est **nécessaire** que son polynôme caractéristique soit scindé et il est **suffisant** qu'il soit scindé à racines simples, donc :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \text{ mais pas sur } \mathbb{R}.}$$

3. Notons $r_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}i$ et $r_2=\overline{r_1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{8}i$; on a alors par récurrence immédiate :

$$\boxed{D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r_1^n&0\\0&0&r_2^n\end{pmatrix}}$$

Puisque $|r_1|^2=\frac{1}{4}+\frac{6}{64}=\frac{11}{32}<1$ et $|r_2|=|r_1|$, on a $r_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $r_2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\boxed{D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

4. Prenons X_2 et X_3 des vecteurs propres associés respectivement à r_1 et r_2 ; la famille $\mathcal{F}=(X_1,X_2,X_3)$ est alors une base de diagonalisation de l'endomorphisme u canoniquement associé à A, et en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{F}$ on aura $D=P^{-1}AP$ mais aussi $D^n=P^{-1}A^nP$ (récurrence immédiate, ou bien on considère l'endomorphisme u^n...), puis $A^n=PD^nP^{-1}$. Puisque $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, les préliminaires nous assurent qu'il en va de même pour $(PD^nP^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (toute suite constante est convergente...).

$$\boxed{A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} PLP^{-1}}$$

Le calcul de cette limite nécessite théoriquement de connaître les valeurs de P et P^{-1}, ce qui est évidemment pénible. Bon, je n'ai finalement pas trop envie de finasser... Je demande à ma (grosse) calculatrice.

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[0,1/2,1/2],[3/4,0,1/4],[1/8,7/8,0]]):
> P:=Eigenvectors(A)[2];
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{11}{8}\,\frac{-1+1/2\,i\sqrt{6}}{\left(1/2+\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}\right)\left(-1/2+1/8\,i\sqrt{6}\right)} & \frac{11}{8}\,\frac{-1-1/2\,i\sqrt{6}}{\left(1/2-\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}\right)\left(-1/2-1/8\,i\sqrt{6}\right)} & 1 \\ -1/4\,\frac{13+6\,i\sqrt{6}}{1/2+\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}} & -1/4\,\frac{13-6\,i\sqrt{6}}{1/2-\frac{23}{8}\,i\sqrt{6}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(P.DiagonalMatrix([0,0,1]).P**(-1));
...
```

$$\boxed{A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1/3&2/5&4/15\\1/3&2/5&4/15\\1/3&2/5&4/15\end{pmatrix}}$$

5. En notant C la transposée de π, le problème est équivalent à : trouver C dans $\mathrm{Ker}\,({}^tA-I)$ dont les coefficients sont positifs et de somme égale à 1. Puisque ce noyau est de dimension 1 (pourquoi ?), la condition de normalisation fait qu'il y aura au plus une solution.

```
NullSpace(Transpose(A)-1);
```

$$\left\{\begin{bmatrix}5/4\\3/2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\text{L'unique solution au problème posé est : } \pi=\begin{pmatrix}1/3 & 2/5 & 4/15\end{pmatrix}}$$

Partie II

1. On peut faire le calcul brutal... ou constater que P est le polynôme caractéristique de B, et appliquer le théorème de Cayley-Hamilton – qui n'est pas au programme de PT :

$$\boxed{P(B) = 0}$$

2. (a) Il suffit de réaliser la division euclidienne de X^p par P, qui est de degré 2 : le reste est de degré au plus 1.

$$\boxed{\text{Il existe } Q \in \mathbb{R}[X],\ \alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } X^p = PQ + \alpha_p X + \beta_p}$$

   (b) On évalue évidemment la relation polynomiale précédente en les racines de P, à savoir 1 et $a+b-1$. On obtient alors $1 = \alpha_p + \beta_q$, et $(a+b-1)^p = \alpha_p(a+b-1) + \beta_p = \alpha_p(a+b-1) + (1-\alpha_p)$. Une ligne de calcul plus loin, il vient :

$$\boxed{\alpha_p = \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2} \text{ puis } \beta_p = \frac{a+b-1-(a+b-1)^p}{a+b-2}.}$$

   (c) Si on reprend la division euclidienne vue plus haut et qu'on évalue ces polynômes en B, le terme $P(B)$ est nul, et il vient donc :

$$\boxed{B^p = \alpha_p B + \beta_p I_2}$$

3. Observons la suite géométrique en jeu. Puisque $0 < a, b < 1$, on a

$$-1 < a+b-1 < 2-1 = 1$$

donc $(a+b-1)^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\alpha_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{a+b-2}$ et $\alpha_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a+b-1}{a+b-2}$; ainsi :

$$\boxed{B^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{a+b-2} B + \frac{a+b-1}{a+b-2} I_2 = \frac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}}$$

Partie III

1. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Chaque $m_{i,k}$ est positif, donc

$$m_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}}_{=1} - \underbrace{\sum_{k \neq j} m_{i,k}}_{\geqslant 0},$$

donc :

$$\boxed{\text{pour tous } i, j, \text{ on a } m_{i,j} \leqslant 1}$$

2. (a) Il suffit de noter que si M est stochastique, alors $MX_1 = X_1$ (traduit le fait que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1), et $X_1 \neq 0$.

$$\boxed{X_1 \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre 1.}}$$

   (b) C'est presque pareil ! La condition $MX_1 = X_1$ dit exactement que sur chaque ligne i, $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$. Comme on a par ailleurs supposé les $m_{i,j}$ positifs :

$$\boxed{M \text{ est stochastique.}}$$

   (c) Soient A et B stochastique. Tout d'abord, AB est à coefficients réels positifs (somme de produits de réels positifs) ; ensuite, $(AB)X_1 = A(BX_1) = AX_1 = X_1$ (on a utilisé deux fois le résultat de la question 2.(a)). Ainsi, d'après la question 2.(b), AB est stochastique.

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.}}$$

3. (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$, donc par inégalité triangulaire :

$$|y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ |y_i| \leqslant 1.}$$

(b) Supposons : $MX = \lambda X$. La question précédente nous assure que pour tout i, $|\lambda x_i| \leqslant 1$. Mais le maximum des $|x_i|$ vaut 1, donc si on choisit i_0 tel que $|x_{i_0}| = 1$, on obtient $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda, \text{ alors } |\lambda| \leqslant 1.}$$

(c) Soient λ une valeur propre de A, et Z un vecteur propre associé. On n'a pas forcément $\operatorname{Max}|z_i| = 1$, mais ce maximum est strictement positif ($Z \neq 0$). Si on le note m et qu'on considère $X = \frac{1}{m}Z$, on a alors toujours $AX = \lambda X$, mais avec cette fois $\operatorname{Max}|x_i| = 1$, et on peut appliquer le résultat des deux questions précédentes.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont toutes de module majoré par } 1}$$

2 Analyse : CCP MP 2008 - maths 1

I Généralités

1. Déjà, on peut noter que, si x est négatif ou nul, la suite de terme général $(-1)^{n-1}/n^x$ ne tend pas vers 0, donc la série associée diverge grossièrement.

   Si au contraire x est strictement positif, la même suite :
   - est alternée ;
   - décroît en valeur absolue ;
   - tend vers 0.

   D'après le célébrissime critère des séries alternée, la série converge.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } F \text{ est } \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[.}$$

2. (a) Soit $t \in [0,1[$. La suite $(g(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série géométrique $\sum(-t)^n$, qui est convergente puisque $|-t| < 1$, et dont la somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \dfrac{1}{1+t}\cdot$

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } t \mapsto \frac{1}{1+t}\cdot}$$

Pour étudier la convergence uniforme, on peut tenter la convergence normale de la série définissant g ; un rapide essai montre que ça ne fonctionne pas. Ne nous laissons pas abattre pour autant, et étudions simplement la différence $g - g_n$. Pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g(t) - g_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-t)^{k+1}\right| = \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

et cette dernière quantité tend vers $1/2$ lorsque t tend vers 1. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|g_n - g\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } g \text{ sur } [0,1[.}$$

Remarque : On pouvait également conclure avec le théorème de la double limite.

(b) Calculons

$$\int_0^1 |g(t) - g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On peut alors majorer

$$\int_0^1 |g(t) - g_n(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+2},$$

et le membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$; ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Remarque : On remarquera que les théorèmes du cours ne s'appliquaient pas pour intervertir le signe somme et la limite, puisqu'il n'y a pas de convergence uniforme. C'est pourquoi il a fallu majorer directement l'intégrale avec un (modeste) bidouillage. Quand vous serez suffisamment grands (allez, une ou deux semaines !), on aura un autre théorème permettant de passer à la limite dans une intégrale sans recourir à la convergence uniforme : ce sera le *théorème de convergence dominée*, et c'est lui qui était demandé dans l'énoncé original.

Reprenons ! Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 g_n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot$$

Le résultat précédent s'écrit donc

$$\boxed{F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 g(t) \,\mathrm{d}t.}$$

Enfin, on calcule aisément cette dernière intégrale :

$$\int_0^1 g(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

$$\boxed{F(1) = \ln 2.}$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire la majoration *uniforme* suivante :

$$\forall x \geqslant 2 \qquad \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot$$

En d'autre termes, si l'on définit, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction ϕ_n sur $[2, +\infty[$ par

$$\phi_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

alors on a prouvé que $\|\phi_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^2}\cdot$ Puisque la série $\sum 1/n^2$ est notoirement convergente, on en déduit (comparaison de séries à termes positifs) que la série $\sum \phi_n$ converge normalement.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \text{ converge normalement sur } [2, +\infty[.}$$

Bon, ce qui est super, c'est qu'on peut maintenant appliquer le *théorème de la double limite* — on a le droit puisque la convergence normale, et donc uniforme, a lieu sur un voisinage de l'infini. Tout d'abord, notons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi_n(x) = 0$.... Ou plutôt, notons que c'est vrai pour $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi_1(x) = 1$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} \phi_n(x) \right) = 1.}$$

4. (a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$, et de dérivée

$$h_x : t \mapsto \frac{t^{x-1}\,(1 - x\ln t)}{t^{2x}}\cdot$$

Ainsi :
- $h'_x(t) > 0$ si et seulement si $t < \mathrm{e}^{1/x}$;
- $h'_x(t) = 0$ si et seulement si $t = \mathrm{e}^{1/x}$;
- $h'_x(t) < 0$ si et seulement si $t > \mathrm{e}^{1/x}$;

Je n'ai pas le courage de typographier le tableau de variations...

La fonction h_x est donc décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x}, +\infty[$, et ainsi :

$$\boxed{\text{À partir du rang } N_x := \lceil \mathrm{e}^{1/x} \rceil \text{, la suite de terme général } \frac{\ln n}{n^x} \text{ est décroissante.}}$$

(b) Soit $a > 0$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $f'_n : x \mapsto (-1)^n\,\dfrac{\ln n}{n^x}\cdot$

Fixons momentanément x dans $[a, +\infty[$. Alors $N_x = \lceil \mathrm{e}^{1/x} \rceil \geqslant N_a = \lceil \mathrm{e}^{1/a} \rceil$. Cela veut dire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geqslant N_a}$ est décroissante ; elle tend par ailleurs vers 0, ce qui prouve la convergence de la série alternée $\sum\limits_{n \geqslant N_a} f'_n(x)$ et fournit une majoration de son reste pour $n \geqslant N_a$:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{\ln n}{n^x} \right| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}\cdot$$

C'est là que les Athéniens s'atteignirent : cette dernière majoration est en fait *uniforme* sur $[a, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant N_a$, le reste R_n est borné sur $[a, +\infty[$ et plus précisément :

$$\forall n \geqslant N_a \qquad \|R_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}\cdot$$

Puisque $\ln(n+1)/(n+1)^a \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la suite des restes converge uniformément vers 0.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\text{, et ce pour tout } a > 0.}}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de dérivation d'une série de fonctions. Pour tout $a > 0$, on a les trois propriétés suivantes :
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$;

donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée se calcule en dérivant la série terme à terme. D'après le caractère *local* de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ », on en déduit que

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } F' : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{\ln n}{n^x}\cdot}$$

5. Un calcul sans mystère, pour peu que l'on voie que

$$(-1)^{n-1} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Pour tout $x > 1$,

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\,\zeta(x),$$

$$\boxed{\forall x > 1 \qquad F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\,\zeta(x).}$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall x > 1 \qquad F(x) = (1 - 2^{1-x})\,\zeta(x).}$$

Ensuite, vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$, on déduit que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \zeta(x)$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1.}$$

II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

1. (a) Pour tout $x > 1$, la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ a le bon goût de converger *absolument*, et donc de rentrer dans le cadre bien douillet du théorème sur le produit de Cauchy. Il faut ensuite faire attention, comme indiqué dans l'énoncé, au fait que les sommations commencent à l'indice 1, et non à l'indice 0. Un rapide raisonnement devrait vous convaincre que la série de Cauchy commence à l'indice minimal 2...[1]

$$\boxed{\text{La série } \sum c_n(x) \text{ converge absolument et sa somme vaut } \sum_{n=2}^{\infty} c_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2.}$$

(b) On cherche à minorer $|c_n(x)| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}$. Pour cela, cherchons d'abord le maximum de $k(n-k)$ lorsque k parcourt $[\![1, n-1]\!]$. À défaut du maximum, on a un bon majorant[2] si on connaît bien l'allure et les mystères des polynômes du second degré :

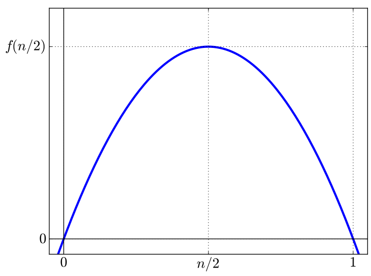

FIGURE 1 – Une parabole

Le maximum de $x \mapsto x(n-x)$ est atteint en $n/2$, on a la majoration :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \qquad 0 \leqslant k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$$

qui mène à

$$|c_n(x)| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{n^2}\right)^x = \frac{(n-1)\,4^x}{n^{2x}}.$$

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \forall n \geqslant 2 \qquad |c_n(x)| \geqslant \frac{(n-1)\,4^x}{n^{2x}}.}$$

1. Si vous ne voyez pas pourquoi, c'est que vous n'avez pas posé de petit calcul informel genre

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots)\cdot(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) = \underbrace{a_1\,b_1}_{c_2} + \underbrace{(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)}_{c_3} + \underbrace{(a_1\,b_3 + a_2\,b_2 + a_3\,b_1)}_{c_4} + \cdots$$

Si ce genre de recherche vous répugne totalement, vous pouvez également poser $a_0 := 0$ et $b_0 := 0$, prendre le théorème du cours, et vérifier explicitement que, avec la formule usuelle $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,b_{n-k}$, on a $c_0 = c_1 = 0$.

2. Qui est le maximum la moitié du temps !

Notamment, si $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{(n-1)\,4^x}{n^{2x}} \sim 4^x n^{2x-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1/2 \\ +\infty & \text{si } x < 1/2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que la suite de terme général $c_n(x)$ ne tend pas vers 0 :

$$\boxed{\text{Si } 0 < x \leqslant \frac{1}{2}, \text{ la série } \sum c_n(x) \text{ diverge grossièrement.}}$$

2. (a) Chouette, une décomposition en éléments simples ! Boarf, celle-là n'est pas bien méchante :

$$\boxed{\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X}\right)\cdot}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} c_n(1) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} &= (-1)^n\, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\ = (-1)^n\, \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right) &= 2\,(-1)^n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{2\,(-1)^n}{n}\, H_{n-1}\cdot \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad c_n(1) = 2\,(-1)^n\, \frac{H_{n-1}}{n}\cdot}$$

(b) Encore un calcul sans mystère :

$$\frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} = \frac{(n+1)H_{n-1} - n \times \overbrace{H_n}^{H_{n-1}+1/n}}{n(n+1)} = \frac{H_{n-1} - 1}{n(n+1)} \geqslant 0$$

dès que $n \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

(c) Oh, ben on est presque arrivés ! on vient de prouver que la suite de terme général $|c_n(x)|$ est décroissante ; elle est alternée. De plus, on sait que $H(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$, donc $H_{n-1}/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il n'en faut pas plus :

$$\boxed{\text{La série } \sum c_n(1) \text{ converge.}}$$