



Marches d'ivrognes

Vendredi 6 février 2026 – calculatrices autorisées

Dans tout le problème, p désigne un nombre réel appartenant à $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On s'intéresse à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: un ivrogne part de l'origine 0 (disons : le bar) à l'instant $n = 0$, et effectue dans une rue rectiligne des pas (chaloupés) successifs soit d'une unité vers la droite (avec la probabilité p), soit d'une unité vers la gauche (avec la probabilité q). Si à un instant donné il se trouve au point d'abscisse $i \in \mathbb{Z}$, il sera à l'instant suivant au point d'abscisse $i + 1$ avec la probabilité p , ou au point d'abscisse $i - 1$ avec la probabilité q .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point où se trouve l'ivrogne à l'instant n .

Cela définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Les problèmes qui vont nous intéresser sont :

- Quelle est la loi de X_n ?
- Avec quelle probabilité l'ivrogne va-t-il retourner au bar ?
- Dans le cas symétrique $p = q = 1/2$, à quelle fréquence retourne-t-il au bar ?

On pourra utiliser les résultats suivants :

- la formule de Stirling : lorsque n tend vers $+\infty$, $n!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$;
- le lemme des coalitions : si $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables aléatoires globalement indépendantes, $1 \leq k \leq n-1$, et si $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications, alors $X = f(Z_1, \dots, Z_k)$ et $Y = g(Z_{k+1}, \dots, Z_n)$, sont indépendantes.

Question préliminaire sobre

Rappeler le développement en série entière de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de l'origine 0.

On précisera le rayon de convergence de la série entière et on exprimera ses coefficients à l'aide des $\binom{2n}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1 Premières propriétés des X_n

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = X_n - X_{n-1}$. Les variables U_n ($n \in \mathbb{N}$) sont supposées mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de U_k , son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X_n = \sum_{i=1}^n U_i$. En déduire l'espérance et la variance de X_n .
3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soient k et ℓ dans $\mathbb{N}$ tels que $k > \ell$. Montrer que les variables aléatoires $X_k - X_\ell$ et X_ℓ sont indépendantes.

En déduire :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X_k = n \mid X_\ell = m) = \mathbb{P}(X_k - X_\ell = n - m),$$

où $\mathbb{P}(X_k = n \mid X_\ell = m)$ désigne la probabilité conditionnelle de $(X_k = n)$ sachant $(X_\ell = m)$.

Prouver enfin :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X_k = n \mid X_\ell = m) = \mathbb{P}(X_{k-\ell} = n - m),$$

2 Probabilité d'être au bar

On s'intéresse aux probabilités pour l'ivrogne d'être au bar à un instant donné.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbb{P}(X_{2k+1} = 0)$? On définit dorénavant, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0).$$

2. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k.$$

3. Pour deux entiers $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \llbracket -k, k \rrbracket$, déterminer plus généralement $\mathbb{P}(X_{2k} = 2\ell)$.

4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en fonction de p , et vérifier que

$$R \geq 1.$$

5. Pour $z \in]-1, 1[$, on pose

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$\text{Montrer que pour tout } z \in]-1, 1[, \quad A(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz}}.$$

3 Probabilité de repasser au bar

On s'intéresse à la probabilité pour que l'ivrogne repasse au moins une fois par le bar (et si oui, quand?).

On note T la variable aléatoire définie par :

$$T = \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 0\} & \text{si } \{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 0\} \text{ n'est pas vide} \\ -42 & \text{sinon} \end{cases}$$

T s'interprète comme le temps de premier retour de l'ivrogne au bar.

Le but de cette question est de déterminer la loi de T . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$t_k = \mathbb{P}(T = 2k)$$

1. Calculer t_1 .
2. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, l'événement $(T = 2k)$ est indépendant de l'événement $(X_{2n} - X_{2k} = 0)$.
3. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} t_k.$$

On convient désormais de poser $t_0 = 0$, de sorte que la relation précédente devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} t_k.$$

4. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} t_n z^n$ est supérieur ou égal à 1, et que sa somme $G(z)$ vérifie :

$$\forall z \in]-1, 1[, \quad A(z) - 1 = A(z) G(z).$$

En déduire l'expression de $G(z)$ pour $z \in]-1, 1[$.

5. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Indication : on pourra commencer par calculer $G'(z)$.

6. Montrer que G est définie et continue sur $[0, 1]$.

En déduire *soigneusement*¹ que $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n = 1 - |2p - 1|$.

7. Montrer que l'ivrogne repassera au bar avec probabilité 1 si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

8. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, la variable aléatoire T est-elle d'espérance finie ? Commentaires ?

4 Fréquence de passage au bar

On se place ici dans le cas équilibré : $p = 1/2$. L'ivrogne va donc repasser au bar presque sûrement. On va voir qu'il va même repasser (presque sûrement) une infinité de fois, et évaluer avec quelle « fréquence asymptotique ».

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n la variable aléatoire égale au nombre de passages de l'ivrogne au bar entre les instants 1 et $2n$.

1. Exprimer R_n à l'aide des fonctions indicatrices des évènements $(X_{2k} = 0)$, pour $1 \leq k \leq n$:

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{2k} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En déduire :

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

3. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n},$$

et en déduire un équivalent de $\mathbb{E}(R_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Que dire de la fréquence moyenne $\frac{\mathbb{E}(R_n)}{n}$ de passages au bar lorsque n tend vers $+\infty$?

1. Pour tout le reste de la copie, vous pouvez faire n'importe quoi !