



Les corrigés de ces trois exercices/problèmes ont été écrits par J. Groux, É. Lucas et V. Masselin.

1 Un calcul de distance

Q 1. On a $|n^2 2^{-n} P(n) Q(n)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a_p b_q| \frac{n^{p+q+2}}{2^n}$ donc, d'après le théorème de croissances comparées, quand $n \rightarrow +\infty$, $|n^2 2^{-n} P(n) Q(n)|$ admet une limite égale à 0, ce qui signifie qu'on a

$$|2^{-n} P(n) Q(n)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (car $2 > 1$).

D'après le théorème de comparaison des séries positives, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |2^{-n} P(n) Q(n)|$ est donc

convergente. Autrement dit, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

Q 2.

2.a. Soit $S \in E$.

- Si S est le polynôme nul, alors on a $(S|S) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \times 0 \times 0 = 0$.
- Réciproquement, on suppose qu'on a $(S|S) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (S(n))^2 = 0$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} (S(n))^2$ étant à termes positifs et de somme nulle, tous ses termes sont nuls. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc $2^{-n} (S(n))^2 = 0$, donc $(S(n))^2 = 0$ (car $2^{-n} \neq 0$) d'où $S(n) = 0$. Le polynôme S possédant une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul. En conclusion, on a $(S|S) = 0$ si et seulement si S est le polynôme nul.

2.b. • D'après la question 1, l'application $(\cdot|\cdot)$ définie par l'énoncé est définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soient $P, Q \in E$. On a $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} Q(n) P(n) = (Q|P)$. L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc symétrique.
- Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (\lambda P_1 + \mu P_2|Q) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (\lambda P_1 + \mu P_2)(n) Q(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (\lambda P_1(n) + \mu P_2(n)) Q(n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda 2^{-n} P_1(n) Q(n) + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P_2(n) Q(n) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P_1(n) Q(n) + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P_2(n) Q(n) = \lambda (P_1|Q) + \mu (P_2|Q). \end{aligned}$$

L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc linéaire par rapport à sa première variable. Comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable. L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc bilinéaire.

- Soit $P \in E$. On a $(P|P) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (P(n))^2 \geq 0$ (somme de termes positifs). De plus, d'après

la question précédente, si on a $(P|P) = 0$, alors P est le polynôme nul.

L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc définie positive.

- En conclusion, l'application $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E , il s'agit donc d'un produit scalaire sur E .

Q 3.

3.a. D'après le cours sur les séries géométriques,

$$\text{la fonction } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ est définie sur }]-1, 1[$$

et, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $f(t) = \frac{1}{1-t}$.

3.b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $e^{-x} \in]-1, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-nx} = (e^{-x})^n$. D'après la question précédente,

$$\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-nx} \text{ est donc convergente.}$$

3.c. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = f(e^{-x})$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $] -1, 1[$, et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$. Par composition,

$$\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

3.d. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $f(t) = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}$, $f'(t) = (-1) \times (-1) \times (1-t)^{-2} = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $f''(t) = (-2) \times (-1) \times (1-t)^{-3} = \frac{2}{(1-t)^3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc $g(x) = f(e^{-x}) = \frac{1}{1-e^{-x}}$, $g'(x) = -e^{-x} f'(e^{-x}) = \frac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ et

$$g''(x) = e^{-x} f'(e^{-x}) + e^{-2x} f''(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} + \frac{2e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3} = \frac{e^{-x} + e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}.$$

3.e. D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série entière, les séries entières $\sum_{n \geq 1} nt^{n-1}$

et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)t^{n-2}$ ont un rayon de convergence égal à 1 et leur somme coïncide sur $] -1, 1[$ avec les fonctions f' et f'' respectivement. On a ainsi

$$S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

et

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.$$

De même, comme les séries de terme général $n(n-1)2^{-n}$ et $n2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent, on a

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} + S_1$$

où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} = \frac{1}{2^2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4} f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$$

donc $S_2 = 6$. En conclusion, on a calculé $S_0 = 2$, $S_1 = 2$ et $S_2 = 6$.

Q 4.

4.a. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(X^2 - aX - b|1) &= (X^2|1) - a(X|1) - b(1|1) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} n^2 - a \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} n - b \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \\ &= S_2 - aS_1 - bS_0 = 6 - 2a - 2b.\end{aligned}$$

De même, on a

$$(X^2 - aX - b|X) = (X^2|X) - a(X|X) - b(1|X) = S_3 - aS_2 - bS_1 = 26 - 6a - 2b.$$

Or, on a

$$\begin{cases} (X^2 - aX - b|1) = 0 \\ (X^2 - aX - b|X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 4a = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Ainsi, le vecteur $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si on a $\boxed{(a, b) = (5, -2)}$.

4.b. On note A l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. En notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}A &= \{(X^2 - cX - d|X^2 - cX - d), (c, d) \in \mathbb{R}^2\} = \{\|X^2 - cX - d\|^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{\|X^2 - P\|^2, P \in \mathbb{R}_1[X]\}.\end{aligned}$$

Or, d'après le cours, comme $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, l'ensemble $\{\|X^2 - P\|, P \in \mathbb{R}_1[X]\}$ admet un minimum égal à la distance du vecteur X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$, notée d . En particulier, $\boxed{\text{l'ensemble } A \text{ admet un minimum}}$, égal à d^2 .

4.c. D'après le cours, on a $d = \|X^2 - p(X^2)\|$, où p désigne la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_1[X]$.

D'une part, le projeté orthogonal $p(X^2)$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p(X^2) = aX + b$.

D'autre part, le vecteur $X^2 - p(X^2)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$ donc $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X . D'après la question 4a, on a donc $(a, b) = (5, -2)$.

On a ainsi $d = \|X^2 - 5X + 2\|$ donc, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}d^2 &= \|X^2 - 5X + 2\|^2 = (X^2|X^2) - 10(X^2|X) + 4(X^2|1) + 25(X|X) - 20(X|1) + 4(1|1) \\ &= S_4 - 10S_3 + 4S_2 + 25S_2 - 20S_1 + 4S_0 = 150 - 260 + 24 + 150 - 40 + 8 = 32.\end{aligned}$$

Par positivité de d , on en conclut qu'on a $\boxed{d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$.

NDSG : On pouvait aussi noter que :

$$d^2 = \|X^2 - 5X + 2\|^2 = (X^2 - 5X + 2|X^2 + (-5X + 2)) = (X^2 - 5X + 2|X^2)$$

2 Polynômes de Hermite

Q 5. Initialisation : On a bien H_0 unitaire et de degré 0

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit un polynôme de degré n .

On a $\deg(XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n > n - 1 \geq \deg(H'_n)$

donc $\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n - H'_n) = n + 1$ d'où l'hérédité

Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n}$

Q 6. Initialisation : On a $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ ainsi on a bien $H'_{0+1} = (0+1)H_0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

On a $H'_{n+2} = (XH_{n+1} - H'_{n+1})' = XH'_{n+1} + H_{n+1} - H''_{n+1} = (n+1)XH_n + XH_n - H'_n - (n+1)H'_n$
donc $H'_{n+2} = (n+2)(XH_n - H'_n) = (n+2)H_{n+1}$

Conclusion : On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)H_n$

Q 7.

7.a. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$.

Par croissance comparée on a $x^2 P(x)Q(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $P(x)Q(x)f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1/x^2$

or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

donc par comparaison à une fonction positive, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

de façon analogue la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$

ainsi la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

ainsi pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on a l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$

7.b. Soit P, Q et $R \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ Montrons
$$\begin{cases} (i) & \langle \lambda P + R | Q \rangle = \lambda \langle P | Q \rangle + \langle R | Q \rangle \\ (ii) & \langle P | Q \rangle = \langle Q | P \rangle \\ (iii) & \langle P | \lambda Q + R \rangle = \lambda \langle P | Q \rangle + \langle P | R \rangle \\ (iv) & \langle P | P \rangle \geq 0 \\ (v) & \langle P | P \rangle = 0 \implies P = 0 \end{cases}$$

Pour (i) On a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(x) + R(x))Q(x)f(x)dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)Q(x)f(x)dx$

Pour (ii) On a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)P(x)f(x)dx$

Pour (iii) vrai avec (i) et (ii)

Pour (iv) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)f(x) \geq 0$ donc $\int_{\mathbb{R}} P^2(x)f(x)dx \geq 0$ donc $\langle P | P \rangle \geq 0$

Pour (v) On suppose $\langle P | P \rangle = 0$

donc $\int_{\mathbb{R}} P^2(x)f(x)dx = 0$ or la fonction $x \mapsto P^2(x)f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)f(x) = 0$ or f ne s'annule pas

donc $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x) = 0$ ainsi P admet une infinité de racines

donc $P = 0$

On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q 8.

8.a. On va encore effectuer une démonstration par récurrence.

Initialisation : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P | H_0 \rangle = \langle P^{(0)} | H_0 \rangle$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P | H_n \rangle = \langle P^{(n)} | H_0 \rangle$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P | XH_n - H'_n \rangle = \langle P | XH_n \rangle - \langle P | H'_n \rangle$

Sous réserve d'existence, on effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) \text{ et } x \mapsto P(x)H_n(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)(P(x)H_n(x))dx = [-f(x)(P(x)H_n(x))]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(P'(x)H_n(x) + P(x)H'_n(x))dx$$

On a $[(P(x)H_n(x))f(x)]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = 0$ par croissance comparée ce qui valide l'intégration par parties

donc $\langle P | XH_n \rangle = \langle P | H'_n \rangle + \langle P' | H_n \rangle$

ainsi $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P' | H_n \rangle = \langle (P')^{(n)} | H_0 \rangle$ par hypothèse de récurrence

donc $\langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P^{(n+1)} \mid H_0 \rangle$ d'où l'hérédité

Conclusion : On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle}$$

8.b. D'après ce qui précède pour tout P tel que $\deg P < n$, on a $\langle P \mid H_n \rangle = \langle 0 \mid H_0 \rangle = 0$

donc si $0 \leq i < j$, on a $\deg(H_i) = i < j$ d'après **Q5**. donc $\langle H_i \mid H_j \rangle = 0$

La famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc orthogonale et formée de $n+1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ donc libre

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$

8.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|H_n\|^2 = \langle H_n \mid H_n \rangle = \langle H_n^{(n)} \mid H_0 \rangle$ d'après **a**

En utilisant **Q6**, $H_n^{(n)} = (H'_n)^{(n-1)} = n(H'_{n-1})^{(n-1)} = \dots = n!H_0^{(0)} = n!H_0$

donc $\|H_n\|^2 = n!\langle H_0 \mid H_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} f = 1$ d'après le *rappel*

donc $\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

8.d. On a $\boxed{H_1 = X; H_2 = X^2 - 1 \text{ et } H_3 = X^3 - 3X}$ car $H_3 = X(X^2 - 1) - 2X$

La famille $(\frac{1}{\sqrt{i!}}H_i)_{0 \leq i \leq 3}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ d'après **b** et **c**

comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et que les vecteurs sont non nuls, alors il s'agit d'une base orthonormée de $\dim \mathbb{R}_3[X]$.

$$\text{Première méthode} \quad \text{Donc } P = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle P \mid \frac{1}{\sqrt{i!}}H_i \rangle}{\frac{1}{\sqrt{i!}}} H_i = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle P \mid H_i \rangle}{i!} H_i = \sum_{i=0}^3 \frac{\langle P^{(i)} \mid H_0 \rangle}{i!} H_i$$

(bof!)

Autre méthode : On a $P - H_3 = X^2 + 4X + 1$ puis $P - H_3 - H_2 = 4X + 2 = 4H_1 + 2H_0$

donc $\boxed{P = 2.H_0 + 4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3}$

Ainsi le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[X]$ est $2H_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ car $4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3 \in \mathbb{R}_0[X]^\perp$

donc la distance cherchée est $\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \|\frac{4}{\sqrt{1!}}.H_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}.H_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}.H_3\|$

Comme $(\frac{1}{\sqrt{1!}}.H_1, \frac{1}{\sqrt{2!}}.H_2, \frac{1}{\sqrt{3!}}.H_3)$ est une famille orthonormale,

on a : $\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}$ on trouve $\boxed{d = \sqrt{24}}$

Q 9.

9.a. On suppose $p < n$. On remarque que $(H_0, \dots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après **9.b**

donc $S \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_p)$ et comme $(H_0, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n)$ est une famille orthonormale

on a $S \perp H_n$ donc $\boxed{\text{si } p < n, \text{ alors } \langle S \mid H_n \rangle = 0.}$

9.b. On décompose H_n produit d'éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$H_n = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^l (X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{\mu_i} \text{ où}$$

p, q, l sont des entiers, les λ_i sont des entiers impairs, les b_i sont les racines H_n d'ordre pair λ'_i ,

les $X^2 + \alpha_i X + \beta_i$ sont des polynômes de discriminant strictement négatifs

$$\text{On a donc } SH_n = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\lambda_i+1} \cdot \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^l (X^2 + \alpha_i X + \beta_i)^{\mu_i}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + \alpha_i x + \beta_i > 0$, $(x - a_i)^{\lambda_i+1} \geq 0$ et $(x - b_i)^{\lambda'_i}$

donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, S(x)H_n(x) \geq 0}$

9.c. Par l'absurde si H_n n'a pas n racines réelles distinctes

On note S et p défini comme ci-dessus. On a donc $p < n$

Ainsi d'après **a** : $\int_{\mathbb{R}} S(x)H_n(x)f(x)dx = 0$ or d'après **b** : $\forall x \in \mathbb{R}, S(x)H_n(x)f(x) \geq 0$

de plus $x \mapsto S(x)H_n(x)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, S(x)H_n(x)f(x) = 0$
comme f ne s'annule pas, alors $\forall x \in \mathbb{R}, S(x)H_n(x) = 0$
donc SH_n est le polynôme nul car admettant une infinité de racines
comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, S ou H_n est nul ce qui est Absurde
On en déduit que H_n a n racines réelles distinctes

3 Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Q 10. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.

Par produit, f est continue sur $[0; +\infty[$.

PQ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\sum_{k=0}^d a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout k , $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2+k} e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc

$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. f l'est donc aussi.

On en conclut que f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q 11. Soit $\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q)$.

— La question précédente prouve que φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

— Pour $(P_1, P_2, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)$: φ est linéaire à gauche.

— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$: φ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.

— Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P, P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) \geq 0$: φ est positive.

On suppose $\varphi(P, P) = 0$; alors $\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$.

Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent φ est définie.

— **Conclusion** : φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 12. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geq 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par

parties, $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

Q 13. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $(X^k|1) = k!$ ».

Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)! : \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Q 14. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$, $\deg P'' \leq n-2$; ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 15. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$.
La matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q 16. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0, -1, -2, \dots, -n$. α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable.

Finalement, α est diagonalisable et $\text{Sp}(\alpha) = \{-k; k \in [0; n]\}$.

Q 17. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim \ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1$.

Q 18. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant $\ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ et c_k son coefficient dominant.

c_k est non nul et $P_k = \frac{1}{c_k}Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Si R_k est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 donc $a = \frac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.

Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q 19. Soit d le degré de P_k

Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.

Pour $k = 0$: $\alpha(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que $\alpha(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

Q 20. On vient de voir que $P_0 = 1$.

Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.

$\alpha(P) = 1 - X$ donc $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.

De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $\alpha(P) = 2X + (1 - X)(2X + b) = -2X^2 + (4 - b)X + b$ donc $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.

Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Q 21. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt$.

on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$;

par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties,

$$(\alpha(P)|Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.$$

Q 22. En procédant de même mais en partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q , on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q 23. Soit k et l deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après Q13, $(\alpha(P_k)|P_l) = (P_k|\alpha(P_l))$ et, d'après Q9, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$; or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$

Conclusion : $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Q 24. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\varphi : P \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$.

φ et ψ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$.

Pour $i \leq n-1$, $\varphi(X^i) = \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt = i!$ et $\psi(X^i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^i$.

Pour tout $i \in [0; n-1]$, $\varphi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q 25. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels

$x_1, x_2, \dots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul. V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation (*) pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 26. Soit $P = \prod_{i=1}^n (X - x_i)^2$.

$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i , $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.

Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\varphi(P) > 0$.

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$$