



Khôlles : quinzaine numéro 9

Du 2 au 13 mars 2026

Pour les dernières semaines, plus de questions de cours (qui est maintenant parfaitement appris, alors à quoi bon ?). Il faut néanmoins évidemment connaître et savoir appliquer précisément les théorèmes !

1 Première semaine : préhilbertiens, endomorphismes orthogonaux

Reprise de la semaine précédente :

- Espaces euclidiens : le cadre, Cauchy-Schwarz, utilisation de l'orthogonalité, en particulier pour déterminer la borne inférieure de la distance entre un vecteur fixe et ceux d'un sous-espace de dimension finie : ce point doit faire l'objet d'une géométrisation autonome et d'un dessin.
- Existence de bases orthonormées en dimension finie (par récurrence, et par Gram-Schmidt).
- Matrice d'un produit scalaire ; changement de base ; matrices orthogonales ; décomposition QR (en exercice).
- Automorphismes orthogonaux ; lien avec les matrices orthogonales. Habitants de $SO_2(\mathbb{R})$ puis $SO(E)$ puis $O(E)$ en dimension 2. Habitants de $SO(E)$ en dimension 3. Identification précise des rotations en dimension 3.

2 Deuxième semaine : auto-adjoints et ÉDL

- Endomorphismes autoadjoints : théorème spectral sans E à la fin (géométrique et matriciel).
- Diverses applications telle que l'étude des extrémis de $\frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2}$.
- Endomorphismes symétriques (définis) positifs. Il faut savoir prouver l'équivalence entre « $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ » et « pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x \rangle \geq 0$ » (et variantes strictes/matricielles).
- Équations différentielles linéaires : rappels du cours de première année (structure des espaces de solution – vectoriel ou affine – équations linéaires d'ordre 1, et d'ordre 2 à coefficients constants). La seule nouveauté est le théorème de Cauchy pour les équations scalaires d'ordre 2 à coefficients continus : $y'' = ay' + by + c$ possède une unique solution à conditions initiales en $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ imposées (a , b et c sont continues sur un intervalle I).
- Problèmes de recollement. Et on peut aussi redonner des systèmes différentiels linéaires, histoire de faire un peu de réduction.

3 Coming next

Prochaine et dernière quinzaine : espaces vectoriels normés, calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$.