



Espaces vectoriels normés

1 Topologie

1.1 Des normes

Exercice 1 – Centrale 2010 [6/10]

Dans un espace vectoriel normé, caractériser l'inclusion $B(x_0, r) \subset B(x'_0, r')$ à l'aide de x_0 , x'_0 , r et r' .

Exercice 2 – Mines 2009 [6/10]

On note E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Pour $f \in E$, on définit $N(f) = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que N est une norme.
2. La comparer à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 – Mot-clé : « densité » [8/10]

Soit u une suite à valeurs dans $[0, 1]$. On définit sur $E = \mathcal{C}([0, 1])$:

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(u_n)|}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que N soit une norme.
2. Lorsque cette condition est vérifiée, comparer $\|\cdot\|_\infty$ et N .

Exercice 4 – Sur les fonctions lipschitziennes [6/10]

E est ici l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziennes. On définit sur E :

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \text{ et } N_a(f) = |f(a)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$$

1. Vérifier que N et N_a sont des normes sur E .
2. Sont-elles équivalentes ?
3. N est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 5 – Hum... histoire de normes équivalentes ? [6/10]

Soient $x_0, \dots, x_n$ $n + 1$ réels distincts. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=0}^n |P(x_i)| \geq \alpha \sup_{[0,1]} |P|.$$

Exercice 6 – Les yeux fermés [4/10]

Montrer que les parties de $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 3z\} \quad \text{et} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < y^2 + z^2\}$$

sont respectivement fermées et ouvertes.

1.2 Ouverts et fermés ; intérieur et adhérence

Exercice 7 – Intérieur d'un sous-espace [6/10]

Soit F un sous-espace strict de E . Montrer que F est d'intérieur vide.

Exercice 8 – Adhérence et intérieur d'un convexe [7/10]

Soient E un espace vectoriel normé réel et C une partie convexe de E .

Montrer que l'adhérence puis (plus difficile) que l'intérieur de C sont convexes.

Exercice 9 – Dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ [6/10]

Calculer l'adhérence et l'intérieur dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ de :

1. l'ensemble des $f \in E$ nulles en 0 et en 1 ;
2. l'ensemble des fonctions strictement positives ;
3. l'ensemble des fonctions strictement croissantes.

Exercice 10 – Ouvert + fermé [5/10]

Soient Ω et F deux parties respectivement ouverte et fermée d'un espace vectoriel normé. Montrer que

$$\Omega + F = \{a + b \mid a \in \Omega \text{ et } b \in F\}$$

est un ouvert.

2 Topologie des matrices

Exercice 11 – Projecteurs et symétries [3/10]

Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de projection (respectivement symétrie) constitue une partie fermée.

Exercice 12 – Diagonalisables denses [5/10]

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13 – $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert dense [5/10]

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 – $O_n(\mathbb{R})$ compact [4/10]

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné.

Exercice 15 – Mines [8/10]

Soit $M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, $\text{Sp}(M) = \{a\}$. Montrer l'équivalence entre :

1. $|a| < 1$;
2. $M^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$;
3. $\sum_p M^p$ converge (au sens : $\left(\sum_{i=1}^p M^i\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge).

Exercice 16 – L'adhérence passe-t-elle par 0 ? [8/10]

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. La matrice nulle est-elle dans l'adhérence de la classe de similitude de $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$?

Exercice 17 – Une frontière [7/10]

Déterminer, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la frontière de $SL_n(\mathbb{R})$ (les matrices de déterminant 1).

3 Continuité

Exercice 18 – Distance à un ensemble [7/10]

Pour une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $x \in E$, on définit : $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne (donc continue!).
2. Expliciter un exemple pour lequel $d_A(x) = 0$ avec $x \notin A$.
3. Supposons A fermée. Montrer : $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
4. On suppose que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$. Montrer que A est fermée.

Exercice 19 – Des applications linéaires continues ; exercice limite-limite... [9/10]

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit φ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f.$$

Montrer que φ est continue ; calculer sa norme (au sens hors-programme : la borne supérieure des $\|\varphi(f)\|$, pour f de norme 1), et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

2. Même question avec ψ définie par : $\psi(f) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n} f(1/n)$.

Exercice 20 – Dans $\mathbb{R}^2$ [7/10]

Étudier la continuité des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \text{Max}(x, y)$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f_3 : (x, y) \mapsto \sqrt{|x| + |y|}$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Exercice 21 – Sur le simplexe [6/10]

Montrer que lorsque (x, y, z) décrit l'ensemble des triplets de réels positifs et de somme égale à 1, le produit xy^2z^3 possède un maximum.

Exercice 22 – Sous le graphe [5/10]

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23 – Une surface [6/10]

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d \text{ et } z = f(x, y)\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur vide.

4 Des indications

Exercice 1 – J'imagine qu'on attend (après avoir fait un dessin) : $\|x_0 - x'_0\| + r \leq r' \dots$

Exercice 2 – Déjà, $t \mapsto \sin(n\pi t)$ interdit l'un des deux contrôles. L'autre est assuré par l'inégalité de Taylor-Lagrange (obtenue après la formule de Taylor avec reste intégral... on peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis sur f' en partant d'un point où f' s'annule via Rolle...) entre 0 et le point de $[0, 1/2]$ où $\|f\|_\infty$ est atteinte), fournissant $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{8}N(f)$, atteint pour $x(1-x)$.

Exercice 3 – C'est une norme si et seulement si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$. Lorsque c'est le cas, on a $N(f) \leq 2 \|f\|_\infty$, avec aucune inégalité dans l'autre sens : si $\varepsilon > 0$, on peut construire f telle que $N(f) \leq \varepsilon$ et $\|f\|_\infty = 1$ (prendre un pic évitant les premiers $u_n \dots$).

Exercice 4 – $N_a \leq N \leq 2N_a$ et $\| \cdot \|_\infty \leq N$, mais (« pics ») pas de contrôle du type $N \leq K \| \cdot \|_\infty$.

Exercice 5 – N'y aurait-il pas deux normes sur un même espace de dimension finie ?

Exercice 6 – Je ferais bien intervenir deux fonctions f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dont je prétendrais qu'elles sont continues « d'après les théorèmes usuels », avant de considérer $f^{-1}([0, +\infty[)$ et $g^{-1}(]-\infty, 0])$.

Exercice 7 – Si F était d'intérieur non vide, on trouverait par translation une boule centrée en 0 incluse dans F , puis $E \subset F$ par dilatation.

Exercice 8 – Si $a, b \in \bar{C}$ et $\lambda \in [0, 1]$, il existe $(a_n), (b_n) \in C^\mathbb{N}$ telles que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$. On a alors $\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \in C$ et $\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda a + (1 - \lambda)b$. Pour l'intérieur, si $B(a, \rho_1) \subset C$, $B(b, \rho_2) \subset C$ et $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$, alors en prenant $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$, on a ce qu'on peut espérer.

Exercice 9 – Notant X_1, X_2 et X_3 les trois ensembles considérés, on a $\overline{X_1} = X_1$, $\overset{\circ}{X_1} = \emptyset$, $\overline{X_2}$ est l'ensemble des fonctions à valeurs positives (au sens large), $\overset{\circ}{X_2} = X_2$, $\overline{X_3}$ est l'ensemble des fonctions croissantes (pour l'inclusion non triviale, considérer $f_n = f + \frac{1}{n}\text{Id}$), et enfin $\overset{\circ}{X_3} = \emptyset$.

Exercice 10 – On fixe $(a_0, b_0) \in \Omega \times F$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B(a_0, \rho) \subset \Omega$, et on a alors $B(a_0 + b_0, \rho/2) \subset \Omega + F$ (et on se fiche du caractère fermé de F ; c'était un piège!).

Exercice 11 – L'application $M \mapsto M^2$ est continue...

Exercice 12 – Trigonaliser et ajouter des petits trucs sur la diagonale...

Exercice 13 – Ouvert ($\det^{(-1)}(\mathbb{R}^*)$), dense car $A - \frac{1}{p}I_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ et $\frac{1}{p} \notin \text{Sp}(A)$ à PCR.

Exercice 14 – Borné pour $\| \cdot \|_\infty$ par exemple ; et continuité de $M \mapsto {}^tMM$.

Exercice 15 – $M = aI + N$; binôme...

Exercice 16 – Déjà, il est nécessaire d'avoir $\alpha = \beta = 0$ (le déterminant de $P_n^{-1}AP_n - \alpha I_3$ est toujours nul et converge vers $-\alpha^3 \dots$) Si cette condition est vérifiée, on montre sans mal que la matrice donnée

dans l'énoncé est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 17 – Déjà, $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé. Ensuite, toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est limite de matrices qui ne sont PAS dans $SL_n(\mathbb{R})$ (ajouter $\frac{1}{p}I_n \dots$) donc est dans l'adhérence du complémentaire. Finalement, $SL_n(\mathbb{R})$ est sa propre adhérence !

Exercice 18 – Il faut montrer : $d_F(x) - d_F(y) \leq \|x - y\|$ et $d_F(y) - d_F(x) \leq \|x - y\| \dots$ Pour la première, je lancerais bien un coup d'inégalité triangulaire entre x, y , et $z \in F$ qu'on fixe provisoirement.

Exercice 19 – $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$.

Exercice 20 – $f_1(x, y) = \frac{|x - y| + x + y}{2}$; $f_2(x, x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq f_2(0, 0)$. Sommes, produits, projections et compositions pour f_3 et f_4 .

Exercice 21 – Keywords : continue, fermée, bornée.

Exercice 22 – Caractérisation séquentielle de la fermeture.

Exercice 23 – Caractérisation séquentielle de la fermeture.