

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS - FILIÈRE PC

Deuxième épreuve de Mathématiques - Concours 2024

Proposition de corrigé

Problème inverse pour les matrices de distance euclidienne

1 Matrices de Hadamard

Par caractérisation des matrices orthogonales, une *matrice de Hadamard* H d'ordre n est une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 et telle que ses lignes, comme ses colonnes, sont deux à deux orthogonales, et forcément de norme euclidienne $\sqrt{n}$: $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ est orthogonale.

1▷ Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont des matrices de Hadamard d'ordre 1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ainsi que

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sont orthogonales : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de Hadamard d'ordre 2.

2▷ Soit H une matrice de Hadamard. Les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de $\frac{1}{\sqrt{n}} H$, comme ses lignes $L_1, \dots, L_n$, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$: toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de $\frac{1}{\sqrt{n}} H$ ne change pas cette condition, comme cela ne change pas que les nouveaux coefficients de cette matrice transformée depuis H a ses coefficients dans $\{-1, 1\}$ donc c'est encore une matrice de Hadamard.

3▷ Soit $H = (h_{i,j})$ une matrice de Hadamard d'ordre n . D'après la question précédente, multiplier successivement, pour j de 1 à n , sa $j^{\text{ème}}$ colonne par $h_{1,j}$ de $\{-1, 1\}$, cette nouvelle matrice est encore une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux aux $(h_{1,j})^2$ donc à 1.

Si $n \geq 2$, la deuxième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne donc elle a autant de 1 et de -1 donc le nombre de colonne, n est pair.

4▷ Soit H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4. D'après la deuxième question, il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composés de 1 ; n est pair et la deuxième ligne, comme les suivantes, est composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 et de $n/2$ coefficients égaux à -1 . Quitte à échanger les colonnes pour placer ces 1 sur les $n/2$ premières colonnes, on peut créer une nouvelle matrice de Hadamard d'ordre n dont tous les coefficients de la première ligne sont uniquement composés de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1 .

Si $n \geq 3$, la troisième ligne d'une telle matrice est orthogonale à la première ligne et à la deuxième ligne donc, en particulier, elle a autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ premiers coefficients, autant de 1 et de -1 dans les $n/2$ derniers coefficients donc $n/2$ est lui-même pair : n est un multiple de 4.

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

On note les valeurs propres classées par ordre croissant de f . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k . On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

5▷ f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ donc, par application du Théorème Spectral, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f . On choisit ici une indexation qui respecte l'ordre croissant des valeurs propres.

6▷ Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k . $T_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ est de dimension $n - k + 1$, puisque cette famille est libre, donc d'après la formule de Grassman, on a :

$$\dim(S_k \cap T_k) = \dim(S_k) + \dim(T_k) - \dim(S_k \cup T_k) \geq k + (n - k + 1) - n = 1 \implies S_k \cap T_k \neq \{0\}.$$

7▷ Soit $x \in S_k \cap T_k$, non nul ; il existe $\alpha_k, \dots, \alpha_n$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=k}^n \alpha_j e_j \quad \text{et} \quad (x, f(x)) = \left(\sum_{j=k}^n \alpha_j e_j, \sum_{i=k}^n \alpha_i \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=k}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq \sum_{i=k}^n \alpha_i^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2.$$

$$\implies \lambda_k \leq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right) \leq \max_{y \in S_k, \|y\|=1} (y, f(y)).$$

8▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $S_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \pi_k$ et, pour tout $x \in S_k$ non nul ; il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ réels tels que :

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \quad \text{et} \quad (x, f(x)) = \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \lambda_j \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \lambda_k = \lambda_k \|x\|^2 \implies \lambda_k \geq \left(\frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right).$$

$$\implies \lambda_k \geq \max_{y \in S_k, \|y\|=1} (y, f(y)) \geq \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{z \in S, \|z\|=1} (z, f(z)) \right).$$

Donc, par double inégalité, on a :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right).$$

9▷ Soit M une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le Théorème Spectral, il existe P de $O_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^T M P$ est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de valeurs positives. Si on pose $B = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$, alors $M = B^T \cdot B$.

On suppose à présent que M , matrice symétrique, admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u . $A = \lambda u \cdot u^T - M$ est alors, par combinaison linéaire, une matrice symétrique réelle telle que :

$$A \cdot u = \lambda \|u\| u - \lambda u = 0 \quad \text{et} \quad \left(\forall v \in E_\lambda^\perp = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu \right), v^T \cdot A \cdot v = -v^T \cdot M \cdot v \geq 0.$$

donc, d'après la première partie de la question, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ et donc $M = \lambda u \cdot u^T - B^T \cdot B$.

3 Caractérisation des MDE

10▷

$$P = I_n - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1/n \\ -1/n & \dots & -1/n & 1 - 1/n \end{pmatrix}.$$

P est symétrique ($P^T = I_n^T - \frac{1}{n} (\mathbf{e}^T)^T \cdot \mathbf{e}^T = P$),

$$P^2 = I_n - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = I_n - \frac{2}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T + \frac{1}{n^2} \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = P$$

$$P \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} - \frac{1}{n} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbf{e}^\perp) \quad P \cdot x = x - \frac{1}{n} \mathbf{e} (\mathbf{e}^T \cdot x) = x$$

donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$.

11▷ Soit $D \in \Delta_n$. Avec les notations proposées :

$$D = (d_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - x_{j,k})^2 \right) = (\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2x_i^T \cdot x_j).$$

$$C \cdot \mathbf{e}^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & \dots & \|x_1\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_i\|^2 & \dots & \dots & \|x_i\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \dots & \dots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} \cdot C^T = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \|x_1\|^2 & \dots & \|x_j\|^2 & \dots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{et} \quad M_A^T \cdot M_A = (x_i^T \cdot x_j) \quad \text{donc} \quad D = C \cdot \mathbf{e}^T + \mathbf{e} \cdot C^T - 2 M_A^T \cdot M_A.$$

Si on suppose, de plus, que $D \in \Delta_n$, on a :

$$(T(D))^T = -\frac{1}{2} P^T D^T P^T = T(D), \quad T(D) \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{2} P D P \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{2} P D \cdot 0 = 0$$

d'après la question précédente, et pour tout $v \in \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$, $P \cdot v = v$ donc $v^T T(D) v = \|M_A v\|^2 \geq 0$:

$$v^T T(D) v = -\frac{1}{2} v^T P^T D P v = -\frac{1}{2} v^T D v = -\frac{1}{2} (v^T C \mathbf{e}^T v + v^T \mathbf{e} C^T v - 2 v^T M_A^T \cdot M_A v).$$

Ainsi, $T(D)$ est positive et $T(D) \in \Omega_n$:

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad & (\exists (u, v) \in \text{Vect}(\mathbf{e}) \times \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp) \quad x^T T(D) x = x^T T(D) u + x^T T(D) v \\ & = u^T T(D) v + v^T T(D) v = (T(D) u)^T v + v^T T(D) v = \|M_A v\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque : on peut directement utiliser la stabilité de $\text{Vect}(\mathbf{e})$ et donc de son orthogonal $\text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$ par $T(D)$ puisqu'elle est symétrique.

12▷

$$\text{Pour toute } A = (a_{i,j}) \in \Omega_n, K(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & a_{j,j} & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - 2A$$

donc $K(A) = (a_{i,i} + a_{j,j} - 2a_{i,j})$; comme A est symétrique positive, d'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T \cdot B$ donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{i,k} B_{k,j}$, soit le produit scalaire des vecteurs lignes BL_i et BL_j de B : $K(A) = (\|BL_i\|^2 + \|BL_j\|^2 - 2(BL_i, BL_j))$, c'est-à-dire $K(A) = (\|BL_i - BL_j\|^2)$. Ainsi, on a $\boxed{K(A) \in \Delta_n}$.

13▷ D'après la question 10, $P \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot P^T = \mathbf{e}^T \cdot P = 0^T$. Pour tout $A \in \Omega_n$, $K(A) \in \Delta_n$ donc $T \circ K(A) \in \Omega_n$ et, puisque $A \cdot \mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{e}^T \cdot A^T = \mathbf{e}^T \cdot A = 0^T$, on a :

$$-\frac{1}{2}P(\mathbf{e}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mathbf{e}^T - 2A)P = PAP = AP - \frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^TAP = A - \frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^TA = A.$$

Ainsi, on a : $\boxed{T \circ K = \text{Id}_{\Omega_n}}$.

14▷ Soit D une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle.

— Si $D \in \Delta_n$, alors $T(D) \in \Omega_n$ donc $\boxed{-\frac{1}{2}P \cdot D \cdot P \text{ est positive}}$ d'après la question 11.

— Réciproquement, si $-\frac{1}{2}PDP$ est positive, le fait que $P \cdot \mathbf{e} = 0$ entraîne que $T(D) \in \Omega_n$ et donc que $\boxed{K \circ T(D) = D \in \Delta_n}$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (K \circ T(D))_{i,j} = (T(D))_{i,i} + (T(D))_{j,j} - 2(T(D))_{i,j} = d_{i,j}$$

$$\text{car } (T(D))_{i,j} = -\frac{1}{2} \left(d_{i,j} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (d_{i,k} + d_{k,j}) + \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} d_{k,\ell} \right) \text{ (diagonale nulle).}$$

15▷ Soit M une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ (donc forcément non nulle). D'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lambda \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T - B^T \cdot B$.

$-\frac{1}{2}PMP = -\frac{1}{2}P\lambda \mathbf{e}\mathbf{e}^TP + \frac{1}{2}PB^T \cdot BP = -\frac{1}{2}P\lambda \mathbf{e}\mathbf{e}^TP + \frac{1}{2}PB^T \cdot BP = \frac{1}{2}(BP)^T(BP)$ donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T T(M) X = \frac{1}{2} \|BPX\|^2 \geq 0$: $\boxed{T(M) \text{ est positive}}$ et $\boxed{M \text{ est MDE}}$ d'après la question précédente.

4 Spectre des MDE

16▷ Soit M est MDE d'ordre n . Les distances sur la diagonale sont nulles donc $\text{Tr}(M) = 0$. Or M est symétrique réelle, donc diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pour respecter les notations de

l'énoncé; la trace étant un invariant de similitude, on a donc : $\boxed{\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0}$.

17▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle; D est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle. Soit $x \in \text{Vect}(\mathbf{e})^\perp$; $P \cdot x = x$, donc, d'après la question 14 :

$$x^T \cdot D \cdot x = (P \cdot x)^T \cdot D \cdot (P \cdot x) = -2x^T \cdot T(D) \cdot x \leq 0.$$

18▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant.

On pose $S_{n-1} = (\text{Vect}(\mathbf{e}))^\perp \in \pi_{n-1}$; d'après la question précédente, pour tout $x \in S_{n-1}$, $x^T \cdot D \cdot x \leq 0$ donc, d'après le théorème de Courant-Fischer : $\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in S_{n-1}, \|x\|=1} (x^T \cdot D \cdot x) \leq 0$.

Enfin, D est non nulle donc l'une de ses valeurs propres au moins est non nulle. Puisque $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$,

$\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i > 0$ (somme de positifs non nulle) : λ_n est l'unique valeur propre strictement positive de D .

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ (il n'est peut-être pas judicieux d'avoir changé l'ordre des valeurs propres !). On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}} H$, Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i et $D = U^T \cdot \Lambda \cdot U$.

19▷ $D^T = U^T \cdot \Lambda^T \cdot (U^T)^T = U^T \cdot \Lambda \cdot U = D$ donc D est symétrique. De plus, $U \in O_n(\mathbb{R})$ donc U est inversible d'inverse U^T donc D est semblable à Λ donc D a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1 puisque c'est une valeur propre simple.

Enfin, pour tous i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient $d_{i,j}$ de D est :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n (U^T)_{i,k} (\Lambda \cdot U)_{k,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i} \lambda_k u_{k,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k h_{k,i} h_{k,j} = \frac{1}{n} \lambda_1 h_{1,i} h_{1,j} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k h_{k,i} h_{k,j}$$

$$\Rightarrow d_{i,j} \geq \frac{1}{n} \lambda_1 + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k \right) = 0$$

puisque Λ est une matrice diagonale. On remarque que $d_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k h_{1,i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, D est à coefficients positifs et à diagonale nulle.

20▷ On remarque que $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{e}^T$ est la première ligne de U , orthogonale à toutes les autres, donc :

$$D \mathbf{e} = U^T \Lambda U \mathbf{e} = U^T \Lambda \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \sqrt{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{e}$$

donc $\mathbf{e}$ est vecteur propre de λ_1 et D est MDE d'après la question 15.

21▷ Pour $n = 4$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard d'ordre 4. On pose $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$. En accord avec la construction de cette dernière partie, la matrice suivante est une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$:

$$D = U^T \Lambda U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

FIN DU PROBLÈME

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème proposé consistait en l'étude des matrices dites « de distance euclidienne », i.e. des matrices symétriques $A = (a_{i,j})$ dont les coefficients sont $a_{i,j} = \text{dist}(X_i, X_j)^2$, où (X_i) est une famille de points dans un espace euclidien. En particulier, il s'agissait de construire des matrices de distance euclidienne ayant un spectre imposé.

Le sujet comportait cinq parties de difficulté variable, mais non progressive. Les parties 1 et 2, plus abordables, ont permis d'évaluer les connaissances acquises et la maîtrise des bases de l'algèbre linéaire. Quelques questions qui semblaient accessibles dans les parties suivantes ont conduit à des compositions lacunaires, les candidats partant à la recherche des questions les plus abordables.

Ainsi, le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions fondamentales n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans [l'annexe D](#).

1.5.2 Conseils aux candidats

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention aux points suivants.

- Rédiger de façon efficace. Trop de candidats perdent beaucoup de temps en des développements qui partent d'une bonne intention, mais sont beaucoup trop longs. En outre, des pages et des pages de calculs sont très certainement signe d'erreur de départ ou de méthode inadaptée.
- Soigner la rédaction. Les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Ne pas « tricher ». Les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte. Bien comprendre ce qui vous est demandé.

1.5.3 Conclusion

Le jury a été perplexe devant le grand nombre d'erreurs de logique et le manque de maîtrise -par certains candidats- de notions fondamentales et de résultats incontournables. Même si nous avons pu nous réjouir de la présence d'un grand nombre de copies excellentes, l'existence de questions de cours (à l'image de la 5) permettant d'évaluer l'assimilation des fondamentaux, nous a permis de constater de grandes différences de niveau de préparation des candidats.

Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

D Mathématiques 2 PC

Pour préciser les affirmations précédentes, voici une extraction des erreurs rencontrées.

Première partie

Q1 - Des erreurs très surprenantes à cette première question. Notamment des matrices avec des coefficients 0 quand ceux explicitement demandés sont ± 1 , ou alors des matrices visiblement non inversibles.

Q2 - Beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition d'une matrice orthogonale (ou alors ne font pas clairement voir qu'ils la connaissent). Signalons au passage une caractérisation erronée des matrices orthogonales à l'aide du déterminant rencontrée trop souvent. Le plus simple était de dire que les colonnes (ou les lignes) constituent une famille orthonormale. Ceux qui ont utilisé la caractérisation $A^T A = I_n$ se sont embarqués dans des calculs de coefficients indigestes qui peuvent remplir des pages et ont ainsi perdu énormément de temps. Par ailleurs, « la matrice reste forcément orthogonale » n'est pas une démonstration.

Q3 - La parité de n était le résultat d'un calcul simple de produit scalaire. Encore une fois, le déterminant a été souvent utilisé à tort. Comme avant, la réponse « en utilisant les différentes opérations de Q2 on obtient la matrice voulue » n'a pas été validée comme une démonstration.

Q4 - Cette question a été peu traitée.

Deuxième partie

Q5 - Une trop grande partie des candidats semblent mal connaître le théorème spectral. L'existence d'une base orthonormée composée de vecteurs propres est oubliée (ou maladroitement redémontrée, en admettant alors le caractère diagonalisable), l'utilisation souvent citée du procédé de Gram-Schmidt est ici hors sujet.

Q6 - Cette question a été bien traitée moins souvent qu'on aurait pu l'espérer. On a pu lire $\dim(A \cup B)$ la dimension d'une réunion d'espaces vectoriels, l'affirmation que $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) \neq \{0\} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ et des démonstrations impliquant les dimensions des espaces très mal justifiées. Un grand nombre de candidats ont pensé pouvoir extraire de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ une base du sous-espace vectoriel S_k , ou alors sont persuadés que e_k appartient à S_k , ce qui est faux en général.

Q7 - Q8 - Beaucoup de candidats ont décomposé les vecteurs dans une base inadaptée $(x_1, \dots, x_n)$ avant de procéder à une minoration du produit scalaire erronée. Beaucoup font des calculs en s'imaginant que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de f . Même chose en question 8.

Q9 - Le début de la question 9 a été bien traité globalement. La deuxième partie proposée beaucoup moins, l'apparition du terme uu^T restant souvent mystérieuse.

Troisième partie

Q10 - À cette question, la plupart du temps on n'a que la symétrie de P . Beaucoup de confusions entre inclusion et égalité pour les sous-espaces caractéristiques de P .

Q11 - La première partie a été bien traitée (même si parfois on attendait de voir une justification plus complète). Encore une fois la conclusion demandée était, le plus souvent, absente des copies.

Quatrième partie

Q16 - La question 16 a été bien traitée même par des candidats qui n'avaient pas réussi les questions précédentes.

Q18 - La question 18 était peu traitée, le plus souvent partiellement.

Cinquième partie

Les questions de cette partie n'ont été que rarement bien traitées.