



Centrale 2024 PSI – Maths 1

Ce corrigé a été écrit par Simon Billouet et Laurent Dietrich.

Partie I : intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(\cos t - 1)dt$. L'intégrande est une fonction négative, continue, non identiquement nulle, donc $W_{n+1} - W_n < 0$. Ainsi, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Effectuons une intégration par parties avec les deux fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t^{n+1}$. On obtient

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin'(t) \cos^{n+1}(t) dt = [\sin(t) \cos(t)^{n+1}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)(n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) dt$$

En utilisant $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, la linéarité de l'intégrale et l'annulation du crochet, on trouve $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ce qu'on souhaitait démontrer.

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. On a alors $u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = u_n$ d'après la question précédente. La suite (u_n) étant constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)W_n W_{n+1} = u_0 = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$ (car $W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = 1$, par calcul direct).
4. La suite (W_n) est à valeurs strictement positives (par un argument similaire à la question 1), et par stricte décroissance, on a $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ pour tout n , donc $\frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$. Mais d'après la question 2, la quantité de gauche vaut $\frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 en l'infini. Par encadrement, on a donc $W_{n+1} \sim W_n$. En reportant dans la question 3, on a donc $(n+1)W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$, soit en divisant puis en utilisant que $W_n > 0$, l'équivalent souhaité

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

5. $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$, qui est intégrable, donc elle l'est aussi.
6. On réécrit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) dx$$

et on applique le théorème de convergence dominée :

- $x \mapsto \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) dx$ est continue par morceaux et intégrable car nulle sur $]\sqrt{n}, +\infty]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \right| \leq e^{n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{-x^2}$$

par concavité de $\ln$. Le terme de droite est intégrable par la question précédente.

- Limite simple : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

car $n \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \sim -x^2$.

Par convergence dominée,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = I$$

7. Le changement indiqué

$$\begin{cases} x = \sqrt{n} \sin(u) \\ dx = \sqrt{n} \cos(u) du \end{cases}$$

est licite car $\sin$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et il donne

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n \sin^2(u)}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^{2n+1} du = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

8. On en déduit par l'équivalent vu en 4) que

$$I \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Et enfin par parité

$$\boxed{J = 2I = \sqrt{\pi}}$$

Partie II : autour d'une équation différentielle

9. Soit donc $y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de rayon de convergence $R = +\infty$. En dérivant terme à terme sur $] -R, R[$ on obtient

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

L'équation différentielle (II.1) devient alors

$$a_1 x^0 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_{n+2} + a_n] x^{n+1} = 0$$

Par unicité des coefficients d'une série entière on obtient donc que (II.1) est équivalente à

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases} \quad (\text{R})$$

— Analyse : si y vérifie (R) alors on montre par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{\prod_{k=1}^n (2k)^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2} \text{ et } a_{2n+1} = 0}$$

(récurrence à faire par le candidat, c'est la première... le correcteur se permet de la zapper en revanche!)

- Synthèse : pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite définie dans l'encadré ci-dessus vérifie bien (R) et de plus comme $|a_n| \leq \frac{|a_0|}{n!}$ alors y est bien de rayon de convergence $+\infty$ par comparaison.

En conclusion les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ sont celles dont la suite des coefficients vérifie l'encadré ci-dessus.

10. Avec les notations ci-dessus, $y(0) = 1$ équivaut à $a_0 = 1$. La suite des coefficients est alors entièrement déterminée par la formule encadrée, ce qui laisse cette unique solution

$$y: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

11. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètre. On note pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $f(x, t) = \cos(x \sin(t))$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t))$ est intégrable sur le segment $[0, \pi]$ car continue.
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = |-\sin^2(t) \cos(x \sin(t))| \leq 1$$

et cette domination est intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver sous le signe intégral.

12. On obtient donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$$

$$G''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt$$

Et donc

$$\begin{aligned} xG''(x) + G'(x) + xG(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos(x \sin(t))) dt \\ &= \int_0^\pi (x(1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t))) dt \\ &= \int_0^\pi x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [\cos(t) \sin(x \sin(t))]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

13. Comme $G(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$.

Pour répondre à la question il ne reste plus qu'à montrer que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ceci conclura par l'unicité qu'on vient de démontrer à la question précédente.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, \pi]$,

$$\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt \right) x^{2n} \quad (\text{D})$$

Justification de l'interversion somme intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la série de fonctions

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!}$$

converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$ car elle y converge normalement puisque

$$\left\| t \mapsto (-1)^n x^{2n} \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} \right\|_{\infty} \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

terme général positif de série convergente.

Partie III : étude d'un endomorphisme sur un espace préhilbertien

14. Un calcul sans saveur donne

$$H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

15. En dérivant la définition de H_n , on trouve directement

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

16. Montrons par récurrence sur n que H_n est de degré n et de même parité que n :

- C'est bien le cas pour $n = 0$ puisque $H_0 = 1$.
- Supposons que c'est le cas pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, quelconque. Le degré de H'_n est alors $n - 1$ (ou $-\infty$ si $n = 0$) et est donc plus petit que celui de $2XH_n$, qui est (par degré d'un produit) $1 + \deg(H_n) = n + 1$. Par degré d'une somme, le degré de H_{n+1} est donc $n + 1$. Par ailleurs, H_n étant de la parité de n , H'_n est de la parité inverse de n (il suffit de dériver la relation $H_n(X) = (-1)^n H_n(-X)$ pour s'en rendre compte), et $2XH_n$ également. Donc H_{n+1} est de la parité inverse de celle de n , c'est-à-dire celle de $n + 1$.
- D'où la conclusion par axiome de récurrence.

17. En écrivant $H_n = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on constate via la relation de récurrence que

$$H_{n+1} = 2a_n X^{n+1} + R$$

avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. La suite (a_n) des coefficients dominants de H_n vérifie donc la relation de récurrence $a_{n+1} = 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est donc géométrique de raison 2, et puisque $a_0 = 1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n$$

18. La fonction nulle appartient clairement à E . Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + \mu^2 g^2 + 2\lambda\mu fg$$

Puisque $f, g \in E$, les deux premiers termes de cette somme sont manifestement dans E . Par ailleurs, en utilisant l'inégalité

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

valable pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (la différence est un carré de réels), on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| 2\lambda\mu fg(x)e^{-x^2} \right| \leq |\lambda\mu| (f^2(x) + g^2(x)) e^{-x^2}$$

Le membre de droite étant l'intégrande d'une intégrale qui converge, celui de gauche l'est aussi par majoration de fonctions positives. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\lambda\mu f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ est absolument convergente, donc convergente. Par somme, $\lambda f + \mu g$ est donc un élément de E . Et par caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

On constate que tous les monômes $x \mapsto x^n$ appartiennent à E . En effet, $(x^n)^2 e^{-x^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$ par croissance comparée, d'où le résultat par négligeabilité. Par linéarité, $\mathbb{R}[X]$ est bien un sous-ensemble de E .

19. Cette application est :

- Bien définie, ce qui n'est pas évident, mais c'est la même preuve que celle qu'on vient de faire (E est stable par produit) ;
- Symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$;
- Linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale, donc bilinéaire ;
- Positive par positivité de l'intégrale ;
- Définie. En effet, si $\langle f, f \rangle = 0$, la fonction $x \mapsto f(x)^2 e^{-x^2}$ est continue, positive, intégrable et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, donc nulle.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc bel et bien un produit scalaire sur E .

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons que

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) (-1)^{n-1} e^{x^2} w^{(n-1)}(x) e^{-x^2} dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) w^{(n-1)}(x) dx$$

et une intégration par parties obtenue en primitivant P' et en dérivant $w^{(n-1)}$ nous donne alors

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\left[P(x) w^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) w^{(n)}(x) dx \right)$$

l'intégration par parties étant justifiée par le fait que la quantité $P(x) w^{(n-1)}(x)$ tend vers 0 en $\pm\infty$. Le crochet s'annule donc, et on trouve finalement

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

ce qui signifie exactement que

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle$$

ce que l'on souhaitait démontrer.

21. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on itère l'égalité précédente pour obtenir par une récurrence immédiate

$$\langle P, H_n \rangle = \langle P^{(n)}, H_0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle = 0$$

d'où le résultat.

22. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes échelonnée en degrés, donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, la question précédente montre notamment que les H_k sont orthogonaux deux à deux. D'où le résultat.

23. C'est une conséquence directe de la question 20 de nouveau : en posant $P = H_n$, on obtient

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \langle H'_n, H_{n-1} \rangle = \dots \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle$$

par une récurrence là encore relativement immédiate.

24. Puisque H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n , $H_n^{(n)}$ n'est autre que $2^n n!$. Ainsi,

$$\|H_n\|^2 = \langle n! 2^n, 1 \rangle = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} J = 2^n n!$$

Donc :

$$\|H_n\| = 2^{n/2} \sqrt{n!}$$

25. Le caractère linéaire de u est assez direct (linéarité de la dérivation et du produit par un polynôme fixé). Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le degré de $2XP'$, qui vaut $1 + \deg(P) - 1$, est plus petit que n ; celui de P'' aussi ; par somme, celui de $u(P) = -P'' + 2XP' + P$ est également plus petit que n . D'où la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par u .

26. Id est l'application « identique », ou plutôt identité, de $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$v \circ w(P) = v(w(P)) = v(P') = 2XP' - P'' - P'' + 2XP' + P - P = (u - \text{Id})(P)$$

Et par ailleurs :

$$w \circ v(P) = (2XP - P')' = 2P + 2XP' - P'' = (P + 2XP' - P'') + P = (u + \text{Id})(P)$$

Ces égalités étant vraies pour tout P , on a bien $v \circ w = u - \text{Id}$ et $w \circ v = u + \text{Id}$.

27. D'après la question précédente, on a $u = \text{Id} + v \circ w = w \circ v - \text{Id}$. On a donc

$$\begin{aligned} u \circ v - v \circ u &= (\text{Id} + v \circ w) \circ v - v \circ (w \circ v - \text{Id}) \\ &= v + v \circ w \circ v - v \circ w \circ v + v \\ &= 2v \end{aligned}$$

28. Si $u(P) = \lambda P$, d'après la question précédente, on a

$$u(v(P)) = 2v(P) + v(u(P)) = 2v(P) + v(\lambda P) = (2 + \lambda)v(P)$$

la dernière égalité ayant été obtenue par linéarité de v .

29. Par récurrence sur k :

- $P_0 = 1$ et $u(P_0) = u(1) = 1$ donc P_0 est bien un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$;
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k . On a donc $u(P_k) = \lambda_k P_k$, donc (d'après la question précédente) $u(v(P_k)) = (\lambda + 2)v(P_k)$. Or, $v(P_k) = 2XP_k - P'_k = P_{k+1}$ d'après la question 15 (les fonctions polynomiales sont égales, donc les polynômes aussi, même si cette précision sera probablement inutile vu l'esprit du sujet). Donc $u(P_{k+1}) = (\lambda_k + 2)P_{k+1}$ et P_{k+1} est bien, étant non nul, un vecteur propre pour u associé à la valeur propre $\lambda_{k+1} = \lambda_k + 2$.
- D'où la conclusion par axiome de récurrence.

La suite (λ_k) étant arithmétique, on a manifestement $\lambda_k = 2k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

30. L'endomorphisme u_n possède $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes, à savoir tous les $2k+1$ pour $0 \leq k \leq n$; en effet, tous les H_k sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après un critère classique, u_n est bien diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

31. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons que par linéarité à gauche :

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle -P'' + 2XP', Q \rangle + \langle P, Q \rangle$$

Il s'agit donc de montrer que le premier terme de la somme vaut également $\langle P', Q' \rangle$. Pour ce faire, écrivons sa définition :

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((-P''(x) + 2xP'(x))e^{-x^2} \right) Q(x) dx$$

On remarque que la parenthèse est la dérivée en x de $-P'(x)e^{-x^2}$. Ainsi, par intégration par parties et nullité du crochet, on constate que

$$\langle -P'' + 2XP', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)e^{-x^2} Q(x) dx = \langle P', Q' \rangle$$

Et on a bien démontré le résultat voulu.

32. On a donc pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P', Q' \rangle + \langle P, Q \rangle$$

L'expression de droite étant symétrique en P et Q et par symétrie du produit scalaire, on a donc

$$\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$$

Ce résultat étant notamment vrai pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on a bien :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle$$

ce qui est la définition du fait que u_n est autoadjoint.

33. C'est exactement le théorème spectral appliqué à u_n .
34. La famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ (question 22) constituée de vecteurs propres pour u_n (question 29) ; il suffit donc de normer chacun de ses vecteurs, en le divisant par sa norme calculée en question 24, pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n .

Partie IV : une famille totale

35. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} \right| = f(x)e^{-x^2/2} \cdot e^{-x^2/2}$$

Le facteur de droite est de carré intégrable (on a même calculé J en question 8), et celui de gauche l'est car $f \in E$. Le résultat s'en suit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarque : une autre possibilité, mais elle fait écrire une intégrale de fonction positive avant de montrer sa convergence...

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(x)e^{-ix\xi}e^{-x^2} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{-x^2} dx = \langle |f| | x \mapsto 1 \rangle < +\infty$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|f| \in E$ car $f \in E$ – elles ont le même carré – et $x \mapsto 1 \in E$).

36. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ aux voisinages de $\pm\infty$.
Maintenant

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^{2p-1} \cdot 2xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[-x^{2p-1}e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (2p-1)x^{2p-2}e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2p-1}{2} M_{p-1} = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2^p} J \\ &= \boxed{\frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2^p} \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

37. Développement en série entière de $e^{-it\xi}$ et linéarité de la somme.
38. Il suffit de démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on peut intervertir somme et intégrale dans le résultat précédent (ceci montrera que $\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$).
- Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x)e^{-x^2} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n$. Alors
- les f_n sont clairement continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (négligeables devant $\frac{1}{x^2}$ aux voisinages de $\pm\infty$).
 - $\sum f_n$ converge simplement, vers $x \mapsto f(x)e^{-x^2}e^{-ix\xi}$
 - f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$
 - On montre la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx$ en estimant son terme général :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{-x^2} \frac{|\xi|^n |x|^n}{n!} dx = \frac{|\xi|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |x|^n e^{-x^2} dx \\ &\leq \langle |f| | x \mapsto x^n \rangle \frac{|\xi|^n}{n!} \leq \|f\| \sqrt{\frac{M_n}{\sqrt{\pi}}} \frac{|\xi|^n}{n!} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

En notant a_n le dernier terme obtenu, on constate que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\xi|}{n+1} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\xi|}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Par la règle de d'Alembert $\sum a_n$ converge donc bien absolument, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx$ aussi.

D'où le résultat !

39. $(H_0, \dots, H_n)$ formant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, X^n est combinaison linéaire de $H_0, \dots, H_n$. Ainsi, f est orthogonal à X^n ; c'est exactement ce qu'on souhaitait établir.
40. Puisque $\mathcal{F}(f)$ est développable en série entière, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx \right) \xi^n = 0$$

d'après la question précédente.

41. On a admis que $\mathcal{F}$ était injective sur E . C'est donc que son noyau est restreint à $\{0\}$. Puisque f est dans ce noyau d'après la question précédente, c'est que f est nulle.

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet de Maths 1 de la filière PSI 2024 étudie de manière indépendante les intégrales de Wallis, une équation différentielle puis une famille de polynômes orthogonaux pour un certain produit scalaire introduit dans le sujet.

Le problème est constitué de quatre parties comportant de nombreuses questions indépendantes des parties précédentes :

- une première partie porte sur les intégrales de Wallis ;
- une deuxième partie invite à la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle et propose l'étude d'une fonction définie comme intégrale à paramètre ;
- une troisième partie amène les candidats à étudier les célèbres polynômes d'Hermite ;
- une quatrième et dernière partie, plus technique, a pour objectif de démontrer qu'une famille de polynômes est totale, notion qui est définie dans l'énoncé.

Il était attendu des candidats qu'ils maîtrisent bien plusieurs chapitres de leurs cours : algèbre linéaire (endomorphismes, réduction, polynômes), algèbre bilinéaire (produits scalaires, bases orthonormales, endomorphismes autoadjoints), analyse (suites, séries, séries entières, intégrales sur un segment, intégrales généralisées, intégrales à paramètres, équations différentielles).

Analyse globale des résultats

La première partie, qui proposait une étude des intégrales de Wallis et le calcul de l'intégrale de Gauss, a été réussie par une grande majorité des candidats. Les plus sérieux d'entre eux ont même pu traiter l'intégralité des questions de cette partie.

La deuxième partie a été également bien abordée par de nombreux candidats. On peut toutefois regretter que les théorèmes sur les intégrales à paramètres ne sont souvent pas connus précisément. Des réponses très pertinentes ont toutefois été fournies sur de nombreuses copies. Notons qu'une erreur s'était glissée dans l'énoncé de cette deuxième partie, proposant de résoudre une équation différentielle sur $\mathbb{R}[X]$ plutôt que sur $\mathbb{R}$. Lors de la conception du barème, l'équipe des correcteurs a envisagé plusieurs scénarios pour la répartition des points, suivant que les candidats identifiaient l'erreur d'énoncé et adaptaient leur raisonnement en conséquence, ou qu'ils ne s'apercevaient de rien et continuaient à travailler. Dans la pratique, très peu de candidats semblent avoir repéré ce problème.

La troisième partie a été traitée de manière inégale par les candidats. Si la première moitié (définition et propriétés des polynômes d'Hermite) a été globalement réussie, il n'en a pas été de même pour les sous-parties III.C et III.D, qui ont moins inspiré les candidats.

La quatrième et dernière partie a été très peu abordée, les candidats n'ayant sans doute pas eu le temps d'arriver jusque là.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre, des résultats encadrés, des erreurs barrées proprement. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numérotter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir), barrer proprement les erreurs et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSL...) sont très couramment utilisées, d'autres (SRS pour « scindé à racines simples », par exemple) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que $\forall$, $\iff$ doit être modéré dans des explications, et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques.
- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une égalité entre deux ensembles est demandée et qu'un raisonnement par « double inclusion », est choisi, il est important de bien démontrer les deux inclusions, ou à défaut, de signaler que l'une d'entre elles est évidente si tel est le cas.
- Pour démontrer une équivalence entre deux propriétés, on peut raisonner directement par équivalence, ou raisonner par double implication. Mais montrer une seule implication ne suffit pas.
- À moins d'être évidente, une récurrence doit être correctement rédigée avec la présentation de la propriété à démontrer, la démonstration de l'initialisation, puis de l'hérédité, puis la conclusion. De même, si à l'issue de l'hérédité, les candidats constatent qu'ils n'ont pas utilisé l'hypothèse de récurrence, ils doivent corriger leur copie puisqu'il ne s'agissait donc pas d'un raisonnement par récurrence.
- Quelques erreurs ont été commises sur l'étude des suites de la première partie : par exemple, une suite décroissante n'est pas nécessairement convergente ; si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on n'a pas nécessairement $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1}$.
- De même, il convient d'être précis dans les raisonnements sur les intégrales : par exemple, une primitive de $\cos^n$ n'est certainement pas $\frac{\cos^{n+1}}{n+1}$; la continuité de f doit être évoquée avant d'étudier la convergence d'une intégrale généralisée $\int_I f$; il faut mentionner qu'on manipule des fonctions positives pour utiliser les théorèmes de comparaison ; un changement de variable est justifié si ce dernier est de classe $\mathcal{C}^1$; pour les intégrales généralisées, avant d'écrire la formule d'intégration par parties, il est nécessaire de vérifier que le crochet possède bien des limites en chaque borne ; l'intégrale d'un produit de fonctions n'est pas égale au produit des intégrales !
- Lors de la manipulation de polynômes, il faut éviter les erreurs suivantes : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ne signifie pas que $\deg(P) = n$, mais $\deg(P) \leq n$; écrire « $\deg(P) = n$ donc $\deg(P') = n - 1$ », ne fonctionne pas si P est un polynôme constant.
- Beaucoup de candidats ont vu dans la partie II un problème de Cauchy, avec une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la condition initiale $y(0) = 1$. Certains ont pensé à rajouter $y'(0) = 0$, mais l'annulation du facteur x en 0 devant y'' ne permettait pas, de toutes façons, de s'appuyer sur ce théorème.
- Pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est fréquent d'essayer de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

- Dans la question 19, quelques erreurs auraient pu être évitées : il ne faut pas oublier de justifier l'existence de l'intégrale définissant le produit scalaire ; il ne faut pas oublier non plus l'hypothèse de continuité pour le caractère défini du produit scalaire ; enfin, il ne faut pas confondre les mots « linéaire » et « bilinéaire ».
- Dans la question 22, beaucoup de candidats ont affirmé que l'orthogonalité impliquait la liberté ! Il ne faut pas oublier de préciser que les vecteurs doivent être non nuls.

Conclusion

Le sujet qui touchait à de nombreux thèmes du programme de mathématiques de PSI a permis de mettre en évidence les compétences de tous les candidats. Les correcteurs ont notamment apprécié que certains d'entre eux traitent la première partie du sujet dans son intégralité. Quelques lacunes sur des notions de base ont toutefois été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maîtrise du langage mathématique en général, et plus spécifiquement des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : manipulation des intégrales, des polynômes et des rudiments d'algèbre bilinéaire. Quelques candidats ont même abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs ont toutefois constaté cette année dans trop de copies une maîtrise trop approximative de la rédaction (logique, double implication, récurrence...). Les candidats concernés, même si les idées générales de leurs réponses sont correctes, prennent le risque d'être pénalisés. Inversement, les copies qui proposent une rédaction agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté, ont plus de chance d'être notés favorablement par les correcteurs. Il est vivement conseillé aux candidats d'utiliser un brouillon et de ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.