

CCP PSI 2020 - Un corrigé

PROBLÈME 1 Autour de la fonction sinus cardinal

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

- Q1.** Soit $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction sinus est de classe C^1 sur $[0, t]$ et pour tout $x \in [0, t]$, $|\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc $|\sin(t) - \sin(0)| \leq 1 \times |t - 0|$ i.e.

$$|\sin(t)| \leq t$$

- Q2.** Notons $\theta : t > 0 \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. θ est continue sur $]0, +\infty[$ et bornée par 1 d'après la question précédente.

Soit $x > 0$. Alors, pour tout $t > 0$, $|\theta(t)e^{-tx}| \leq e^{-tx}$. Mais $t \mapsto e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$.

En effet, par limite usuelle, $t^2 e^{-tx} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ puisque $x > 0$. Ainsi, $e^{-tx} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), on a bien le résultat annoncé.

Finalement, $t \mapsto \theta(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc $F(x)$ existe.

Ce raisonnement n'a utilisé que le fait que θ est continue sur $]0, +\infty[$ et bornée donc c'est également valable pour $\sin$ et $\cos$ ce qui donne bien finalement :

$$\text{les fonctions } F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0, +\infty[$$

- Q3.** On peut utiliser le théorème de convergence dominée mais on peut aussi faire plus simple : soit $x > 0$. Comme on l'a vu à la question précédente, pour tout $t > 0$, $|\theta(t)e^{-tx}| \leq e^{-tx}$. Ces fonctions de t sont intégrables sur $]0, +\infty[$ donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |\theta(t)e^{-tx}| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} \right]_{t \rightarrow 0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{x}$$

ce qui donne bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

- Q4.** Posons $f : (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$.

- (a) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (vu dans **Q2**),
- (b) pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$,
- (c) pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-tx}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- (d) Pour tous $x, t > 0$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\sin(t)e^{-tx} \right| \leq e^{-tx}$$

Soit $a > 0$. Alors pour $t > 0$ et $x \geq a$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-tx} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

en posant $\varphi : t > 0 \mapsto e^{-at}$. φ est positive, continue et intégrable (déjà vu) sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, par le théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geq a$,

$$\boxed{F'(x)} = \int_0^{+\infty} (-\sin(t)) e^{-tx} dt = \boxed{-G(x)}$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$ et le résultat précédent est valable pour tout $x > 0$.

Q5. ► Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} H(x) + iG(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt + i \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} (\cos(t) + i \sin(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt = \left[\frac{1}{-x+i} e^{(-x+i)t} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} \end{aligned}$$

En effet, si $t > 0$, $\left| \frac{1}{-x+i} e^{(-x+i)t} \right| = \frac{1}{|-x+i|} |e^{-xt} e^{it}| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} e^{-xt} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ puisque $x > 0$. Il reste enfin à prendre partie réelle et partie imaginaire pour obtenir

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

► Soit $\alpha > 0$. Dans $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$ on pose $u = \alpha t$ (changement de variable C^1 strictement croissant de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ puisque $\alpha > 0$). On obtient donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt} = \int_0^{+\infty} e^{-t \frac{x}{\alpha}} \cos(u) \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2 + 1} = \boxed{\frac{x}{x^2 + \alpha^2}}$$

Q6. On a vu que $F' = -G$. L'expression de G donne donc : pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\frac{1}{x^2+1} = -\arctan'(x)$. Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante réelle c telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = c - \arctan(x)$. Mais on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ et on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En en déduit donc que $c = \frac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x > 0$,

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} \text{ donc } \boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$$

Partie II - Autour de la formule de Viète

Q7. Attention, il y a une petite erreur d'énoncé : il se peut que le dénominateur du membre de droite soit nul, ce qui arrive ssi $t = 0$ $[2\pi]$.

Soit $t > 0$ fixé avec $t \neq 0$ $[2\pi]$. Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: " $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}$ "

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

► **Initialisation** : $P(1)$ est vraie car le produit vaut $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et le membre de droite s'écrit via une formule trigonométrique bien connue :

$$\frac{\sin(t)}{2 \sin(t/2)} = \frac{\sin(2 \times t/2)}{2 \sin(t/2)} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin(t/2)} = \cos(t/2)$$

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi avec la même formule trigo :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)} \\ &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^n \sin(2 \times t/2^{n+1})} = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin(t/2^{n+1}) \cos(t/2^{n+1})} = \frac{\sin(t)}{2^{n+1} \sin(t/2^{n+1})} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Q8. Soit $t > 0$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

► **Initialisation** : $P(1)$ est vraie car le produit vaut $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et le membre de droite aussi.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{4k-2}{2^{n+1}} t\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right) \right) \end{aligned}$$

en utilisant la formule trigo rappelée dans l'énoncé. Tous les nombres impairs de $\llbracket 1, 2^n - 1 \rrbracket$ s'écrivant $4k-1$ ou (exclusif) $4k-3$ avec $k \in \llbracket 1, 2^{n-2} \rrbracket$ on a bien

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right)$$

Q9. Attention : on a toujours le même problème avec $t \dots$

Soit $t > 0$ tel que $t \neq 0[2\pi]$. **Q7** et **Q8** donnent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

t est fixé donc quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{t}{2^n} \rightarrow 0$ donc $\sin(t/2^n) \sim \frac{t}{2^n}$ donc $\frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)} \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ ce qui donne bien

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

► Essayons de résoudre le problème de $t = 0[2\pi]$. Pour $t \neq 0[2\pi]$,

$$\sin(t) = 2^n \sin(t/2^n) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

On a l'égalité sur $]0, +\infty[\setminus \{2p\pi, p \in \mathbb{N}^*\}$ de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$ donc elle se prolonge à tout $]0, +\infty[$.

Soit $t > 0$ fixé. Quand $n \rightarrow +\infty$, $2^n \sin(t/2^n) \rightarrow t > 0$ donc on peut diviser à partir d'un certain rang et on a bien la limite demandée, sans restriction sur t .

Q10. Soit $x > 0$.

- La question précédente montre que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ sur $]0, +\infty[$.
- f et les f_n sont continues sur $]0, +\infty[$.
- Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il reste à assurer la domination : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) \right| e^{-tx} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} e^{-tx} = e^{-tx}$$

Rappelons que $x > 0$ est fixé. La fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est donc positive, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (et ne dépend pas de n). On a donc trouvé une fonction qui domine et le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = F(x)$$

Mais $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt$ (c'est une somme finie) donc

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt$$

Q11. On applique ce qui précède en $x = 1$. On a vu que $F(1) = \frac{\pi}{4}$ et par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-t} dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{2n}}{2^{2n} + (2k-1)^2} = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

en utilisant la question **Q5** pour le calcul des intégrales. On a donc bien montré que

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{k^2 + (2^{n-1})^2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(k/2^{n-1})^2 + 1}$$

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ qui est continue sur $[0, 1]$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right)$ est une somme de

Riemann pour f sur $[0, 1]$ donc elle converge vers $\int_0^1 f(x) dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. A fortiori, $R_{2^{n-1}} \rightarrow \frac{\pi}{4}$. Il reste juste à ajouter le terme pour $k = 0$ mais celui-ci vaut 1 et il est divisé par 2^{n-1} donc il ne modifie pas la limite. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$$

Q13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| = \left| \frac{(2k-1)^2 - 4k^2}{(4k^2 + 2^{2n})((2k-1)^2 + 2^{2n})} \right| = \left| \frac{1 - 4k}{(4k^2 + 2^{2n})((2k-1)^2 + 2^{2n})} \right|$$

$$\leq \frac{4k+1}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})} \leq \boxed{\frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}}$$

puisque $(2k-1)^2 + 2^{2n} \geq 1 + 2^{2n}$ puisque $(2k-1)^2 \geq 1$ puisque c'est un entier naturel non nul.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} & \left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) \right| \leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \\ & \leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = 2^{n+1} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}}_{\leq \frac{1}{2^{2n}}} \leq 2^{n+1} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n}} \\ & = 2^{n+1} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \frac{2^{n-1} + 1}{2^{2n}} \sim 2^{n+1} \frac{4 \times 2^{n-1}}{2^{2n}} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0}$$

Comme on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}}$$

PROBLÈME 2

Les matrices de Kac

Partie I - La dimension 3

Q15.

$$\boxed{\chi_A(X) = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)}$$

Q16. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A donc $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}}$.

A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a 3 valeurs propres réelles distinctes donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres sont de dimension 1.

Q17.

$$\boxed{\chi_B(X) = X(X^2 + 4) = X(X - 2i)(X + 2i)}$$

$X(X^2 + 4)$ est la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $X(X - 2i)(X + 2i)$ celle dans $\mathbb{C}[X]$.
De plus $i\chi_B(iX) = i^2 X(i^2 X^2 + 4) = -X(-X^2 + 4) = \chi_A(X)$. Donc :

$$\boxed{\chi_A(X) = i\chi_B(iX)}$$

Q18. Les valeurs propres de B sont les racines de χ_B donc

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$$

B n'a pas toutes ses valeurs propres réelles donc n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. 0 étant valeur propre d'ordre de multiplicité 1, le sous espace propre de 0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

En revanche B est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui a 3 valeurs propres complexes distinctes donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et les sous espaces propres sont de dimension 1.

Q19.

$$D^{-1}AD = -iB$$

Q20.

$$\Delta^{-1}A\Delta = S \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

S est une matrice symétrique réelle donc est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale R telles que $S = PRP^{-1}$. Ainsi $\Delta^{-1}A\Delta = PRP^{-1}$ donc

$$A = \Delta PRP^{-1}\Delta^{-1} = (\Delta P)R(\Delta P)^{-1}$$

A est donc semblable à la matrice diagonale R donc

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.$$

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Q21. Prenons $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$.

Montrons par récurrence finie que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0$.

Par hypothèse, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

- Initialisation : En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$ l'expression au-dessus, on obtient $\lambda_0 = 0$.
- Hérédité : Supposons que pour un j fixé entre 0 et $n-1$, $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$ et montrons que $\lambda_{j+1} = 0$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=j+1}^n \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + j\pi / j \in \mathbb{Z}\}, \sum_{k=j+1}^n \lambda_k \cos^{k-j-1}(x) \sin^{n-k}(x) = 0$.

En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $\pi/2$, on obtient $\lambda_{j+1} = 0$.

- Conclusion : On a donc montré que la famille est $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Par définition, c'est une famille génératrice de V_n donc c'est une base de V_n et

$$V_n \text{ est un espace vectoriel de dimension } n+1.$$

- Q22.**
- $f_0 = \sin^n$ et $f'_0 = n \sin^{n-1} \cos = n f_1$.
 - $f_n = \cos^n$ et $f'_n = -n \cos^{n-1} \sin = -n f_{n-1}$.
 - Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $f_k = \cos^k \sin^{n-k}$ et

$$f'_k = -k \cos^{k-1} \sin^{n-k+1} + (n-k) \cos^{k+1} \sin^{n-k-1} = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$$

Ces calculs prouvent donc que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f'_k \in V_n$$

φ_n est clairement une application linéaire et par linéarité de la dérivation et les calculs précédents, la dérivée de tout élément de V_n appartient à V_n .

φ_n est donc un endomorphisme de V_n .

De plus, les calculs montrent que la matrice B_n de φ_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ est

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Q23. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k} = (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k} = e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x)$

Q24. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la question précédente et le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} g_k &= \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos^j i^{k-j} \sin^{k-j} \right) \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cos^p (-i)^{n-k-p} \sin^{n-k-p} \right) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p} (-1)^{n-k-p} i^{n-j-p} \cos^{j+p} \sin^{n-j-p} \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{p} (-1)^{n-k-p} i^{n-j-p} f_{j+p} \end{aligned}$$

Comme $0 \leq j+p \leq k+n-k = n$, on a bien

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g_k \in V_n}$$

Q25. On a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g'_k = i(2k-n)g_k$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction g_k n'est pas la fonction nulle donc est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $i(2k-n)$. On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres complexes distinctes et on en déduit que $\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$.
De plus

$$\boxed{Sp(\varphi_n) = \{i(2k-n) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \quad \text{et} \quad SEP(i(2k-n)) = \text{Vect}(g_k)}$$

Q26. L'endomorphisme φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de φ_n , c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{n \text{ est impair}}$.

Q27. En reprenant le calcul de **Q24.**, on a

$$g_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} i^{n-j} f_j$$

Comme $\ker(\varphi_n - inId_{V_n}) = \text{Vect}(g_n)$, on en déduit bien que :

$$\boxed{\ker(B_n - inI_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n + 1$

Q28. Soit $(k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. On a, par définition du produit matriciel, et comme D est une matrice diagonale :

$$(DM)_{kl} = \sum_{j=1}^p d_{kj} m_{jl} = d_{kk} m_{kl}$$

$$(MD)_{kl} = \sum_{j=1}^p m_{kj} d_{jl} = m_{kl} d_{ll}$$

Q29. Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$. D'après **Q28.**,

$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{kl} = \frac{1}{d_{kk}} (A_n D_n)_{kl} = \frac{1}{d_{kk}} a_{kl} d_{ll} = i^{l-k} a_{kl}$$

- Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{k, k+1} = ik = (-i)(-k)$$

- Pour $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, on a :

$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{k, k-1} = -i(n - k + 2)$$

- Dans tous les autres cas,

$$(D_n^{-1} A_n D_n)_{kl} = 0$$

Ainsi on a prouvé :

$$D_n^{-1} A_n D_n = -i B_n$$

A_n et $D_n^{-1} A_n D_n$ sont deux matrices semblables donc ont même polynôme caractéristique. Donc

$$\chi_{A_n}(X) = \chi_{D_n^{-1} A_n D_n}(X) = \chi_{-i B_n}(X) = \det(X I_{n+1} + i B_n) = \det(-i(i X I_{n+1} - B_n)) = (-i)^{n+1} \det(i X I_{n+1} - B_n)$$

Ainsi

$$\chi_{A_n}(X) = (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(iX)$$

Q30. La matrice A_n est semblable à la matrice $-i B_n$. Comme la matrice B_n est diagonalisable de valeurs propres les $i(2k - n)$, on en déduit que la matrice A_n possède $n + 1$ valeurs propres réelles distinctes égales aux $-i \times i(2k - n)$.
Donc

$$\text{Sp}(A_n) = \{2k - n \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Il en découle que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que les sous espaces propres sont tous de dimension 1.
De plus, si X est un vecteur propre de B_n pour la valeur propre λ , alors

$$A D_n X = -i D_n B_n X = D_n X$$

Or D_n étant inversible, $D_n X$ n'est pas le vecteur nul donc $D_n X$ est vecteur propre de A_n pour la valeur propre $-i\lambda$. On en déduit que

$$\ker(A_n - n I_{n+1}) = \text{Vect}(D_n X) \quad \text{avec} \quad \ker(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect}(X)$$

D'après **Q27.**, on peut choisir $X = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ où $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

Donc $D_n X = \begin{pmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ \vdots \\ q'_n \end{pmatrix}$ où $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad q'_k = i^{k-1} i^{n-k} \binom{n}{k} = i^{n-1} \binom{n}{k}$.

Le facteur i^{n-1} étant indépendant de k , on en déduit bien que

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Q31. Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'étape k , l'urne U_1 contient 0, 1, 2, ..., n boules et ces "ou" sont exclusifs. Ainsi,

$$(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}) \text{ est un système complet d'événements}$$

- Q32.** ► Si $j = 0$, il n'y a pas de boule dans l'urne U_1 donc la boule tirée le sera dans U_2 et passera dans U_1 de sorte que l'on aura $j = 1$ à l'étape suivante.
 ► Si $j = n$, toutes les boules sont dans l'urne U_1 donc la boule tirée passera dans U_2 et on aura $j = n - 1$ à l'étape suivante.
 ► Si $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ alors l'urne U_1 va recevoir ou perdre une boule donc $j = j \pm 1$.

$$0 \rightarrow 1 \quad n \rightarrow n - 1 \quad j \rightarrow j \pm 1$$

Q33. ► Si $j = 0$. Le seul moyen de se retrouver sans boule dans l'urne U_1 à l'étape $k + 1$ c'est qu'avant, il y en avait une seule ($l = 1$) et qu'elle a été tirée. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0 \text{ si } l \neq 1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}$$

puisque si à l'étape k , U_1 contient une seule boule, il y a une chance sur n qu'elle soit choisie puisque l'on tire uniformément.

► Si $j = n$. Le seul moyen de se retrouver avec toutes les boules dans l'urne U_1 à l'étape $k + 1$ c'est qu'avant, il y en avait $n - 1$ ($l = n - 1$) et que celle de U_2 a été tirée. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0 \text{ si } l \neq n - 1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}$$

► Si $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, puisque l'on peut avoir une boule en plus ou une boule en moins, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0$ si $l \neq j \pm 1$. Puis, si $l = j - 1$, il faut tirer une boule de U_2 (qui en contient $n - (j - 1) = n - j + 1$) pour en ajouter une dans U_1 et ceci se fait avec probabilité $\frac{n - j + 1}{n}$. De même, on obtient

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0 \text{ si } l \neq j \pm 1 \quad \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n - j + 1}{n} \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{j + 1}{n}$$

Q34. ► Soit $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Comme $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \sum_{l=0}^n \underbrace{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})}_{=0 \text{ si } l \neq j \pm 1} \mathbb{P}(E_{k,l}) = \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

ce qui, avec la question précédente donne bien

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n - j + 1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j + 1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

Pareillement, on obtient

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

Q35. La question précédente, interprétée avec les vecteurs Z_k donne $Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n Z_k$ et donc, par une récurrence immédiate,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

Q36. Pour chaque boule j avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_j la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si elle se trouve au départ dans U_1 et 0 sinon. Alors $N_0 = X_1 + \dots + X_n$ (nombre total de boules dans U_1).

Comme on suppose que les affectations des boules se font indépendamment et équiprobablement, les X_j sont indépendantes et de paramètre $\frac{1}{2}$. On sait alors que N_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ de sorte que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(N_0 = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$:

$$\pi = \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{k} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$$

Q37. D'après la question **Q30**, π est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n donc $\frac{1}{n} A_n \pi = \pi$. Mais on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} = \frac{1}{n} A_n Z_k$. Comme $Z_0 = \pi$, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \pi$ donc

$$N_k \text{ a la même loi que } N_0$$

Q38. Un sens vient d'être fait. Réciproquement, supposons qu'il existe π' une loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π' , alors toutes les variables N_k suivent la loi π' .

On a donc $Z_0 = \pi'$ et $Z_1 = \pi'$ donc $\frac{1}{n} A_n \pi' = \pi'$ donc $\pi' \in \ker(A_n - nI_{n+1})$. D'après la question **Q30**, cet espace est de dimension 1 et engendré par π donc il existe un réel α tel que $\pi' = \alpha \pi$.

Mais π et π' sont des lois de probabilité donc la somme de leurs coordonnées vaut 1. On a donc

$$1 = \sum_{j=0}^n \pi'_j = \sum_{j=0}^n \alpha \pi_j = \alpha \sum_{j=0}^n \pi_j = \alpha$$

Ainsi, $\alpha = 1$ donc $\pi' = \pi$. On a donc bien montré que

$$\pi \text{ est l'unique loi de probabilité telle que : si } N_0 \text{ suit la loi } \pi, \text{ alors toutes les variables } N_k \text{ suivent la loi } \pi$$

FIN

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences des candidats sur une large partie du programme de PSI. Parmi ces compétences sont systématiquement évaluées :

- la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité à les appliquer ;
- la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
- la présentation de la copie.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet comportait deux problèmes indépendants, un d'analyse et un d'algèbre avec une courte application aux probabilités. Dans le problème d'analyse, il était question de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal et de son expression comme limite d'une suite d'intégrales. Le second problème portait sur l'étude des propriétés spectrales de deux matrices introduites par le probabiliste Mark Kac et se terminait par une utilisation probabiliste de l'une de ces matrices. Ce sujet faisait ainsi appel à des théorèmes fondamentaux du cours, sur les intégrales à paramètres et la réduction notamment, et à des connaissances en intégration, en trigonométrie et en probabilités.

Le sujet était long et comportait des questions abordables jusqu'à la fin, permettant aux candidats d'aborder un nombre important de questions et de montrer l'étendue de leurs acquis. Cette année, certaines excellentes copies ont abordé avec succès l'ensemble du sujet. Les plus faibles ont profité de la partie I du problème 2 pour glaner quelques points.

Comme les années précédentes, les correcteurs ont noté les efforts de présentation des copies des candidats. Les résultats sont le plus souvent mis en évidence et les questions (souvent) bien numérotées.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Problème 1

Q1 : si certains ont pensé à la solution consistant à appliquer une inégalité des accroissements finis, beaucoup s'en sortent avec des études de fonctions. Deux erreurs fréquentes dans ce cas : penser qu'il suffit de démontrer que $\sin t \leq t$ ou, plus préoccupant, d'affirmer que $t \mapsto |\sin(t)| - t$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée $t \mapsto |\cos(t)| - 1$.

Q2 : une question très classique de convergence d'intégrales généralisées. La domination en $+\infty$ a été bien menée par bon nombre de candidats. Cette question a mis en lumière une confusion très fréquente entre la preuve de la convergence et celle de la continuité d'une intégrale à paramètre. Qui peut le plus peut le moins, mais cela donne lieu à des développements inutilement compliqués dans le meilleur des cas et à des erreurs dans le moins bon. Attention également lorsque la convergence de l'intégrale est justifiée par comparaison ou lorsque l'on vérifie une hypothèse de domination à s'assurer de comparer des fonctions positives.

Q3 : notons que trop de candidats ont ignoré le problème d'interversion et ont affirmé que puisque l'intégrande tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, il en est de même de $F(x)$. Parmi ceux qui ont abordé la justification de la convergence, si certains ont pensé à utiliser Q1, d'autres se sont lancés dans une application du théorème de convergence dominée. Dans le premier cas, beaucoup de candidats ont trop rapidement conclu à partir de $F(x) \leq 1/x$ et pas de $|F(x)| \leq 1/x$. En cas d'utilisation du théorème de convergence dominée, remarquons qu'il n'est pas suffisant de considérer uniquement la suite de terme général $x_n = n$.

Q4 : cette question d'application du cours a été souvent bien traitée et un nombre satisfaisant de candidats ont pensé à vérifier la domination sur les intervalles du type $[a; +\infty[$. Certains candidats n'ont cependant pas compris que dans la domination, le paramètre doit « disparaître ».

Q5 : cette question a été en général bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Notons tout de même quelques réticences chez certains à utiliser l'intégration d'une fonction à valeurs complexes (ils ont alors préféré une double intégration par parties), d'assez fréquentes erreurs de signe et un dernier résultat trop souvent affirmé avec une justification du type « en effectuant un calcul similaire, on prouve que... ».

Q6 : il est regrettable que près de la moitié des candidats aient oublié que, puisque F est une primitive de G , il y a une constante à déterminer pour en déduire une expression de F .

Q7 : cette question a été étonnamment abandonnée par une proportion non négligeable de candidats ayant pourtant identifié la formule trigonométrique à appliquer. Ceux qui sont allés au bout de la question ont en général bien rédigé la récurrence.

Q8 : bien que plus difficile que la précédente, cette question a été plus souvent abordée. Le mécanisme de la récurrence est souvent bien initié et l'indication utilisée. Peu de candidats ont vu la séparation entre indices pairs et impairs et une minorité sont parvenus à la rédiger de manière satisfaisante. Notons que certains sont parvenus « miraculeusement » au résultat sans justifier la partie sur les indices. Il convient de rappeler que ce type de démarche a très peu de chances d'abuser le correcteur.

Q9 : compilation des résultats des questions précédentes en général bien traitée.

Q10 : la bonne application du théorème de convergence dominée reste une difficulté pour une majorité de candidats. De nouveau la domination laisse trop souvent la variable n présente. Malgré l'indication, certains candidats y ont vu à tort une question sur les séries.

Les dernières questions du Problème 1 ont été assez peu traitées. Notons pour **Q12** que la plupart des candidats n'ont pas vu que la somme comportait « un terme de trop » pour être exactement une somme de Riemann.

Problème 2

Q15 à Q17 : il s'agit de questions assez faciles et souvent bien traitées. Certains perdent en efficacité en calculant un discriminant pour factoriser $x^2 + 4$.

Q18 : l'erreur la plus fréquente a été de justifier la non diagonalisabilité de B sur $\mathbb{R}$ par le fait que son polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples.

Q19 : bien réussie en général. Certains ont perdu du temps en effectuant un pivot de Gauss pour calculer l'inverse d'une matrice diagonale.

Q20 : le calcul a été en général correctement mené. Une moitié des candidats ont pensé au théorème spectral (notons qu'il convient de préciser que la matrice est à coefficients réels). D'autres malheureusement ont calculé le polynôme caractéristique de la matrice $\Delta^{-1}A\Delta$. La majorité des candidats savent qu'une matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable.

Q21 : cette question était plus difficile et a été correctement traitée par peu de candidats. Beaucoup ont pensé à évaluer en 0 ou en $\frac{\pi}{2}$, mais peu sont parvenus à donner un argument précis et se sont contentés d'un trop évasif « on dérive $\frac{n}{2}$ fois » ou d'un « on divise par sin et on évalue en $x = 0$ » sans justification du prolongement par continuité.

Q22 : ce calcul de dérivée a posé problème à un certain nombre de candidats. Parmi ceux qui y sont parvenus, trop peu ont pensé à distinguer les cas $k = 0$ et $k = n$.

Q23 : question généralement bien traitée.

Q24 : la formule du binôme de Newton est connue, mais on lit ensuite trop souvent des arguments du type « g_k est le produit de deux fonctions de V_n , donc g_k est un élément de V_n » sans plus d'explication. Un autre raisonnement récurrent et faux : certains ont montré l'égalité $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k(x) = (2 \cos(x))^n$ puis ont affirmé que puisque le terme de droite est élément de V_n , il en est de même pour chaque terme de la somme.

Q25 : la plupart des bons arguments ont été donnés, pas toujours dans le bon ordre, la formulation de la question y étant peut-être pour quelque chose.

Q26 : bien traitée par la minorité de candidats qui l'ont abordée.

Q27 : peu traitée, cette question a permis aux meilleurs candidats de démontrer leurs capacités de synthèse.

Q28 : bien traitée en général. Certains ont oublié d'utiliser le fait que D est diagonale.

Q29 : le calcul matriciel a été rarement correctement mené et l'utilisation de la question précédente souvent oubliée. La relation entre les polynômes caractéristiques a été souvent affirmée sans justification et trop de candidats pensent que le déterminant est linéaire.

Q30 : cette question a été peu abordée. Certains sont parvenus à justifier la forme des valeurs propres de A_n , mais pratiquement aucun n'est parvenu à justifier correctement l'espace propre demandé.

Q31 : la propriété demandée a souvent été bien énoncée et peu justifiée. Notons qu'un nombre non négligeable de candidats, sans doute influencés par les parties précédentes, ont donné des réponses du type « la famille est libre / liée / une base ».

Q32 : question facile pour laquelle une minorité pense à distinguer les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q33 : question assez bien réussie lorsqu'elle a été abordée.

Q34 : la formule des probabilités totales n'a pas toujours été appliquée avec rigueur.

Q35 à Q38 : questions peu abordées par les candidats. Seulement quelques-uns sont parvenus à donner tous les arguments.

4/ CONCLUSION

En guise de conclusion, nous donnons ici quelques points d'améliorations sur lesquels il convient d'insister.

- Un nombre important de candidats ne prennent pas le recul nécessaire pour voir que des questions (parfois bien résolues) sont bien utiles pour répondre efficacement aux suivantes. Lorsque les parties d'un problème sont indépendantes, cela est précisé dans l'énoncé. En revanche, une partie est rarement une succession d'exercices indépendants.
- Une attention particulière doit être donnée à la précision d'utilisation des résultats du cours et d'exposition des arguments. Il arrive trop souvent qu'une hypothèse soit oubliée ou que la vérification rigoureuse de celle-ci soit remplacée par l'affirmation que l'hypothèse est bien satisfaite.
- Les majorations sont comme chaque année source de difficultés. La valeur absolue et le module ne sont pas employés avec aisance et il est très fréquent de rencontrer des inégalités entre nombres complexes ou des emplois de résultats de comparaison/domination pour les intégrales généralisées sans vérification de la positivité des fonctions considérées.