ψ

Chauffe 2026 en PSI 945/999/972

A rule of thumb for any good math talk is that it should have one proof and one joke... and they should not be the same – Ron Graham

Stéphane Gonnord – Lycée du parc

5 mai 2026

Table des matières

Introduction

Il convient de se (re)mettre au point sur le cours concernant le thème du jour et de travailler un certain nombre d'exercices avant les séances dédiées. Si les points de cours signalés en introduction vous laissent perplexes, il y a peut-être lieu d'exhumer lesdits cours et reprendre les points en question. Pour certains points de cours l'annotation [PREUVE] signifie qu'il serait de bon ton de savoir prouver le résultat. Parfois c'est la connaissance de la [DÉFINITION] précise qui est la priorité.

Une évaluation du niveau à la louche (note sur 10, croissante en fonction de la difficulté) est donnée, indépendamment du concours : un CCINP 6/10 est a priori de niveau comparable à un Mines 6/10 : c'est plutôt difficile pour un CCINP et dans la tranche « moyen-moins » pour un Mines.

Planning prévisionnel pour les 48 heures de la chauffe :

1. Lundi 18 et mardi 19 mai 2026 : suites et séries numériques. [4H]
2. mercredi 20 et jeudi 21 : algèbre linéaire. [5H]
3. Vendredi 22 (4H) et mardi 26 : réduction. [6H]
4. Mercredi 27 et jeudi 28 : probabilités. [5H]
5. Vendredi 29 : diverses choses, et séance tampon pour récupérer le retard. [2H]
6. Lundi 1er, mardi 2 et mercredi 3 juin (2H) : suites et séries de fonctions. [6H]
7. Mercredi 3 (1H), jeudi 4, vendredi 5 et lundi 8 (1H) : intégration. [6H]
8. Lundi 8 (1H), mardi 9 et mercredi 10 : espaces euclidiens et leurs endomorphismes. [6H]
9. Jeudi 11 et mardi 16 : équations différentielles. [4H]
10. Jeudi 18 et vendredi 19 : (topologie et) calcul différentiel. [4H]
11. Vendredi 19, 11H45 : adieux déchirants.

Il y aura par ailleurs en fin de préparation un stage commando Python pour les admissibles à centrale :

1. Le samedi 13 juin à partir de 9H (bon OK, je viens avec les croissants), stage commando Python pour les admissibles à centrale : principe et exemples d'oraux de maths pythonisés.
2. Le mercredi 17 juin de 13H30 à 17H30 : passage public de colles Python/centrale. Un collé passe en conditions réelles toutes les 30 minutes, et des spectateurs (bienveillants !) peuvent assister aux oraux, en ayant eux-mêmes éventuellement préparé le sujet pendant 30 minutes (j'essaierai d'avoir une grande salle info).

Chapitre 1

Suites et séries numériques

1.1 Rappels de cours

Directement du cours :

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. [PREUVE]
- Convergence des séries de Riemann. [PREUVE]
- La convergence absolue implique la convergence tout court.
- Convergence et contrôle du reste pour les séries alternées.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positif. Savoir par exemple prouver : si $u_n = O(v_n)$ avec $u_n, v_n \geqslant 0$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Règle de d'Alembert (Pfffffff.....). [PREUVE]
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Proche du cours :

- Convergence des séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ (hors programme, mais...).
- Formule de Stirling.
- $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n+\gamma+o(1)$ (dans la zone grise du programme, mais utilisable si vous savez effectivement le retrouver... et après accord de l'examinateur).

1.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 1 – *Mines 2025 [7/10]*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k$.

1. On suppose que (u_n) converge. Montrer la convergence de (v_n) et trouver sa limite.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 2 – *Mines 2025 [6/10]*
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k} = a$ admet une unique solution dans $]n, +\infty[$, que l'on notera x_n.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n).
3. Trouver un équivalent simple de x_n.

Exercice 3 – *Mines 2025 [8/10]*
$(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| > 1$. Montrer que la suite (x_n) converge si et seulement si la suite $(x_n+\lambda x_{n+1})$ converge.

Exercice 4 – *Mines 2025 [8/10]*
Soit $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}\cdot$

1. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 5 – *Centrale 2025 [3/10]*
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Si $\forall k = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, soit $\Phi(k)$ la suite de terme général $\Phi(k)_n = \dfrac{1}{k_0} + \dfrac{1}{k_0k_1} + \ldots + \dfrac{1}{k_0k_1\ldots k_n}\cdot$

1. a Étudier la convergence de $\Phi(k)$ dans les cas suivants :
   — k est une suite constante,
   — $\forall n \in \mathbb{N},\ k_n = n+2$,
   — $\forall n \in \mathbb{N},\ k_n = 2n+2$.
2. Si $k \in \mathcal{C}$, montrer que la suite $\Phi(k)$ converge vers une limite $\ell \in]0, 1]$.

Exercice 6 – *Centrale 2025 [6/10]*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_nf(x_n)$.

1. Étudier la suite (x_n).
2. Soit $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \to \ell$.
3. Nature de $\sum x_n$?

Exercice 7 – *IMT 2025 [3/10]*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ possède une unique solution dans $[0, 1]$, que l'on note x_n.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
3. Que dire de la nature de la série de terme général x_n ?

Exercice 8 – *IMT 2025 [1/10]*
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 9 – *ENSEA 2025 [4/10]*

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \sqrt{n}$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.
2. Déterminer la limite de la suite (x_n).

3. Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 – *CCINP 2025 [3/10]*

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

   Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n \pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 11 – *Mines 2024 [4/10]*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_{3n} = \dfrac{2}{\ln(n+3)}$ et $u_{3n+1} = u_{3n+2} = \dfrac{-1}{\ln(n+3)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum a_n$ converge. A-t-on nécessairement la convergence de la série $\sum a_n^2$?
3. Montrer, pour tout entier $p \geq 2$, la divergence de la série $\sum u_n^p$.

Exercice 12 – *CCINP 2024 [2/10]*

1. Soit $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.
2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 13 – *CCINP 2024 [3/10]*

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ converge. La convergence est-elle absolue ?
3. En déduire la nature de la série $\sum (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2 t^2}\,dt$.

Exercice 14 – *Centrale 2018 [4/10]*

1. Citer précisément le théorème des séries alternées.
2. Étudier la nature de la série de terme général $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 15 – *IMT 2018, CCP 2015 [3/10]*

Pour $\alpha > 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer : $R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. Étudier la convergence de $\sum \dfrac{R_n}{S_n}$.

Exercice 16 – *Mines 2017 [7/10]*

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 17 – *Centrale 2017 (deux fois), mines, ENS Rennes, etc [6/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n l'unique racine positive de l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

1. Justifier l'existence de chaque a_n.
2. Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on montrera que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
3. Donner un équivalent simple de $a_n - \ell$.

Exercice 18 – *Mines 2016 [6/10]*
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{(n!)^{1/n}}\cdot$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 19 – *Mines 2016 [4/10]*
Soit $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$. Déterminer la limite de (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n - 1}{n}$?

Exercice 20 – *Centrale 2016 [7/10]*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}\cdot$

1. Nature de la série de terme général $1/x_n$?
2. Trouver une relation entre x_{n+1}^2 et $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}\cdot$
3. Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 – *IMT 2016 [5/10]*
Soient $u_0 \in]0,1[$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}\cdot$ Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 22 – *TPE 2017 [6/10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in]0, \pi/2]$, avec $u_{n+1} = \sin u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$ et que $u_n^2 \sim 6 \ln \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\cdot$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^p.

Exercice 23 – *Centrale 2017 [6/10]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On souhaite étudier la propriété : $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ si et seulement si $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}\cdot$

1. Montrer l'implication directe.
2. On suppose (u_n) monotone. Montrer alors l'équivalence.
3. Sans l'hypothèse de monotonie, le résultat est-il vrai ?

Exercice 24 – *Navale 2018 [7/10]*
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}\cdot$

1.3 Indications

Exercice 1 – On se ramène à $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ qu'on traite à la Cesàro : en ε et avec un peu de soin sur le premier morceau ; il est contrôlé devant un polynôme donc s'écrase devant 2^n... Pour le contre-exemple, $u_n = (-1)^n$ est le premier candidat auquel on pense, bien entendu.

Exercice 2 – « Théorème de la bijection »... On compare ensuite x_n et x_{n+1} via leurs images par f_n (ou f_{n+1}) qui est croissante. En écrivant $x_n = n + u_n$ on obtient par comparaison somme-intégrale :

$$\int_{u_n}^{u_n+n} \frac{dt}{t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n+1} + \cdots + \frac{1}{u_n+n}$$

En passant cette **limite** à l'exponentielle on en déduit deux lignes plus tard : $x_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a - 1} n$.

Exercice 3 – Pour le sens non trivial, on peut penser au très classique « si $x'(t) + \lambda x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ » qu'on peut résoudre en notant $y = x' + \lambda x$ puis en exprimant x à l'aide de y (variation de la constante) puis avec un travail assez fin (essentiellement à la Cesàro) pour conclure. Tentons la même chose version discrète !
On note $y_n = x_n + \lambda x_{n+1}$ de sorte qu'on a toujours $x_k = \dfrac{1}{\lambda} y_{k-1} - \dfrac{1}{\lambda} x_{k-1}$ puis on écrit :

$$x_n = \frac{1}{\lambda} y_{n-1} - \frac{1}{\lambda} x_{n-1} = \frac{1}{\lambda} y_{n-1} - \frac{1}{\lambda^2} y_{n-2} + \frac{1}{\lambda^2} x_{n-2} = \cdots = -\left(\frac{-1}{\lambda}\right)^n \sum_{k=0}^{n} (-\lambda)^k y_k + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^n x_0$$

Sous l'hypothèse $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on écrit alors $y_n = \ell + \varepsilon_n$, on injecte ceci dans la relation précédente, on traite un premier terme en sachant sommer les sommes géométriques (oui, ça reste un gros filtre) et le second à la Cesàro, c'est-à-dire avec des ε en séparant deux morceaux (ce devrait être un passage beaucoup plus filtrant !).

Exercice 4 – (u_n) est à valeurs strictement positives, puis croissante, et une éventuelle limite finie devrait vérifier $\ell = \ell + 0$, mais aussi : $\ell \geqslant u_1 > 0$. Bref : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La suite est plus délicate !
Le professionnel (ou le taupin aguerri) transformera cette équation discrète en équation différentielle : $yy' = \dfrac{1}{x}$ donc $(y^2)' = (2\ln(x))'$ puis $y(x) \sim \sqrt{2\ln(x)}$.
Discrétisons la dérivée de y^2 en considérant $v_n = u_n^2$, on a (lire d l'intérieur vers l'extérieur) :

$$\frac{2}{n} \leqslant v_{n+1} - v_n = (\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{=1/(nu_n)})(\underbrace{u_{n+1} + u_n}_{=2u_n+1/(nu_n)}) = \frac{1 + u_{n+1}/u_n}{n} \leqslant \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2 u_1^2}$$

et en sommant ceci on trouve : $v_n = 2\ln(n) + O(1)$ et on termine sans mal.

Exercice 5 – Je trouve que la difficulté principale consiste à comprendre les notations : il s'agit de prouver la convergence de certaines séries, dont le terme général peut se calculer... mais surtout est positif et majoré par $\dfrac{1}{2^k}$, ce qui donne à peu près tout ce dont on a besoin ! Était-ce vraiment l'énoncé correct ?

Exercice 6 – L'application $g : x \mapsto xf(x)$ stabilise $\mathbb{R}^+$ donc tous les x_n sont positifs. Sur $\mathbb{R}^+$ on a $g(x) \leqslant x$ donc (x_n) est décroissante. Elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$ vérifiant $g(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$ ($f(x) < 1$ donc $g(x) < x$ pour $x > 0$). Pour la question 2, c'est le classique Cesàro : on traite la cas $\ell = 0$ en ε (casser en deux) puis on s'y ramène par linéarité : $\alpha_n = \ell + \beta_n$ avec $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le métier[1] nous conduit ensuite à regarder $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$ qui converge vers $-f'(0)$ (car $x_{n+1} \sim x_n f'(0)$ et $f(x_n) - 1 \sim x_n f'(0)$), puis on appliquant la question précédente, en deux temps : $x_n \sim -\dfrac{1}{nf'(0)}$.

Exercice 7 – La fonction $x \mapsto x^n + x\sqrt{n} - 1$ est continue, strictement croissante sur $[0,1]$, et les valeurs qu'elle prend en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ sont très intéressantes.

Exercice 8 – $u_n = \mathrm{e}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n} + o(1/n)}\right)$...
Sur un exercice de ce niveau de difficulté, on attend une gestion impeccable des relations de comparaison.

1. Et sans lui ? L'examinateur vous fera des suggestions...

Exercice 9 – L'application $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est à valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}_-^*$, et réalise une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On a alors existence et unicité de x_n, mais aussi : $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui donne après passage au logarithme : $\dfrac{\ln(n)}{2} = \sqrt{x_n} + \ln(x_n) \sim \sqrt{x_n}$ puisque $\ln(x) = o(\sqrt{(}x))$ quand x tend vers $+\infty$. Ainsi : $x_n \sim \dfrac{\ln^2(n)}{4}\cdot$

Exercice 10 – $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + O(u^4)$ et on en déduit le résultat annoncé via $\cos(\theta + n\pi)$ et $\cos(-\pi/2 + x) = \sin(x) = x + O(x^2)$... puis la convergence de $\sum u_n$.
Il y a fort à parier que ceux fuyant les O auront calculé des termes supplémentaires (et inutiles) avec des constantes multiplicatives FAUSSES (ou correctes mais avec des erreurs de raisonnement).

Exercice 11 – Les sommes partielles sont nulles (une fois sur 3 !) ou au pire majorées (en valeur absolue) par quelque chose comme $\dfrac{1}{\ln(N/3)}\cdots$ donc convergent vers 0. Ensuite je prendrais bien $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}\cdot$ Enfin $\sum\limits_{k=1}^{3n+2} u_k^p$ est une somme partielle de $\sum\limits_n \dfrac{2^{2k}+2}{\ln^2(n+3)}$ (si k est pair) donc diverge puisque $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n+3)}\right)\cdot$ Ce n'est pas très différent si p est impair.

Exercice 12 – On a $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ (pas nécessaire pour montrer que le reste d'une série convergente tend vers 0 bien entendu !), donc $\sum v_n$ converge absolument puisque $v_n = O(1/n^{3/2})$.

Exercice 13 – $\displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt \leqslant \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt$, ce qui nous fournit la convergence absolue. Ensuite, $u = nt$ nous donne $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2t^2} dt = \frac{1}{n}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt - \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)$ puis :

$$(-1)^n \int_0^1 \mathrm{e}^{-n^2t^2} dt = K\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$$

Exercice 14 – $\dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n})$... Nommer deux termes permettra de rédiger plus sereinement.

Exercice 15 – Pour le premier point, c'est du cours (comparaisons soigneuses somme/intégrale). Et puisque (S_n) converge, $\dfrac{R_n}{S_n}$ peut être comparé à quelque chose de simple et positif.

Exercice 16 – $\mathrm{Arccos}(\theta_0 + u) - \mathrm{Arccos}(\theta_0) \sim Ku$ avec $K \neq 0$ donne la convergence absolue pour $\alpha > 1$. Ensuite, $\mathrm{Arccos}(\theta_0 + u) - \mathrm{Arccos}(\theta_0) = Ku + K'u^2 + o(u^2)$ (avec $K' \neq 0$) donne la convergence pour $1/2 < \alpha \leqslant 1$ (semi-convergence plus convergence absolue) et la divergence pour $\alpha \leqslant 1/2$ (somme d'une semi-convergente et d'une divergente).

Exercice 17 – On représente le graphe de $f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x^2 + x - 1$ et celui de f_{n+1} sur $[0,1]$... et on dispose de presque tout ce dont on a besoin ! Une fois établie la convergence décroissante de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, on prendra un peu de soin pour passer la relation $a_n\dfrac{1-a_n^n}{1-a_n} = 1$ à la limite...

```
from scipy.optimize import fsolve
def a(n):
    def f(x):
        return sum(x**k for k in range(1, n+1))-1
    return fsolve(f, 0.5)[0]

>>> [a(n)-0.5 for n in range(1, 10)]
[0.5, 0.11803398874989468, 0.043689012692076368, 0.018790063675884205,
 0.0086603916420046057, 0.0041382583616553781, 0.0020170551781655277,
 0.00099417792287825879, 0.00049311828655185241]
```

En écrivant $a_n = 1/2+\varepsilon_n$, on trouve $2\varepsilon_n = a_n^n(1/2+\varepsilon_n)$, puis (attention à a_n^n : on ne passe pas $a_n \sim 1/2$ à la puissance n comme ça !) :

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}} + o(1/2^n)$$

```
>>> [2**n*(a(n)-0.5) for n in range(1, 10)]
[1.0, 0.47213595499957872, 0.34951210153661094, 0.30064101881414729,
 0.27713253254414738, 0.2648485351459442, 0.25818306280518755,
 0.25450954825683425, 0.25247656271454844]
```

Exercice 18 – Une comparaison somme/intégrale permet d'encadrer $\ln u_n$ assez bien.

Exercice 19 – Je trouve $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{\ln n}\cdot$

Exercice 20 – Déjà, (x_n) est à valeurs positives, puis est croissante et enfin ne converge pas (sinon...), donc tend vers $+\infty$. Ensuite, $x_n \leqslant x_0 + \dfrac{n}{x_0}$ donc $\dfrac{1}{x_n} \geqslant \dfrac{x_0}{x_0^2+n}$ d'où la divergence de $\sum \dfrac{1}{x_n}\cdot$ Puisque $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$, on obtient $x_n^2 = x_0^2 + 2n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}\cdot$ On peut alors utiliser en première approximation la minoration $x_n^2 \geqslant 2n$ pour majorer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x_k^2}$ par un terme de l'ordre de $\ln n$, et enfin obtenir : $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 21 – Noter que $\varphi : x \mapsto \dfrac{x+x^2}{2}$ (qu'on représentera) stabilise $]0,1[$ permettra de montrer rapidement et correctement (vous distinguant donc de 95% des autres candidats) que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, on peut plisser les yeux en regardant le dessin puis noter qu'il existe $K \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant K u_n$, et c'est à peu près réglé, non ?

Exercice 22 – Déjà (calmement...) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, le développement limité $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donnera d'une part $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim \dfrac{u_n^3}{6}$ et d'autre part $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sin(u_n)}{u_n} = u_n\left(1 - \dfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$. Pour la dernière question, $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ converge si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Appliqué à $\alpha_n = u_n$ on obtient la convergence de $\sum u_n^3$; appliqué à $\alpha_n = \ln(u_n)$ on obtient la divergence de $\sum u_n^2$.

Exercice 23 – Pour le sens direct je passerais bien par un développement limité. Dans le cas monotone (donc décroissant vers 0 ; pourquoi ?) j'écrirais bien $u_n + u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$ avant de multiplier par $\sqrt{n}$ puis gendarmiser. Pour le contre-exemple (ben oui...) j'ai bricolé : $u_{2p} = \dfrac{1}{4p}$ et $u_{2p+1} = \dfrac{3}{4p}$; ça doit marcher...

Exercice 24 – Il s'agit de discuter (ça demande du soin et du temps, mais vous serez récompensés pour ça !). Par exemple si $a = b$...

Chapitre 2

Algèbre linéaire

2.1 Rappels de cours

Directement du cours :

- Polynômes : tête des (factorisations en) irréductibles ($\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$), définition et caractérisation des multiplicités des racines [DÉFINITION], relations coefficients-racines (à savoir retrouver).
- Polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Comment sont *définis* les projecteurs et symétries ? Par quelles relations sont-ils *caractérisés* ? [DÉFINITION] et [PREUVE]
- Somme directe de (plus de deux) sous-espaces. [DÉFINITION]
- Construction d'une application linéaire à l'aide de sa restriction à des supplémentaires (au sens étendu, lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$).
- Déterminant de Vandermonde. [PREUVE]

Proche du cours :

- Images et noyaux itérés...
- Nilpotents : savoir montrer (d'au moins une façon) qu'ils sont trigonalisables, avant même le cours de réduction. Si l'indice de nilpotence de u est p et $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, alors...
- Si une matrice carrée a sa diagonale dominante (i.e. : ...) alors elle est inversible.
- Endomorphismes (et matrices) de rang 1. Ils vérifient par exemple $u^2 = (\operatorname{tr} u)u$. Quelle est la tête de leur matrice dans une base que l'on construit en commençant par une base du noyau ? Et en commençant par une base de l'image ?

2.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 25 – *Mines 2025 [6/10]*
On considère des entiers $N \geq 1$ et $n \geq 2$, et une famille de réels $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tous distincts. On pose $\varphi : P \in \mathbb{R}_N[X] \mapsto \big(P(a_1), P'(a_1), P(a_2), P'(a_2), \dots, P(a_n), P'(a_n)\big)$.

1. Quel est le rang de φ ?
2. À quelle condition, φ est-il un isomorphisme ? Cette condition étant remplie, déterminer l'image réciproque de $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ par φ.

Exercice 26 – *Mines 2025 [7/10]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(M) \leqslant 1\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M appartient à V si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^{\mathrm{T}}$.
2. Soient $M_1 = X_1Y_1^{\mathrm{T}}$ et $M_2 = X_2Y_2^{\mathrm{T}}$ avec $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^n$. Montrer que, si $M_1 + M_2$ est de rang inférieur ou égal à 1, alors (X_1, X_2) est liée ou (Y_1, Y_2) est liée.

Exercice 27 – *Mines 2025 [6/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la rang de M.
2. À quelle condition la matrice M est-elle inversible ?
3. Cette condition étant vérifiée, déterminer l'inverse de M.

Exercice 28 – *Mines 2025 [4/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les puissances de A.
3. Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec A.

Exercice 29 – *Mines 2025 [8/10]*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ tels que $U + V = \mathcal{L}(E)$ et tels que $\forall u \in U$, $\forall v \in V$, $u \circ v + v \circ u = 0$.

1. Montrer qu'il existe $p \in U$ et $q \in V$ deux projecteurs tels que $p + q = \mathrm{id}$.
2. Si $v \in V$, on pose $\varphi(v) = v|_{\mathrm{Ker}\,(p)} \in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p, E)$. Montrer que φ est injective. En déduire que $\dim(V) \leqslant (n - r)^2$, avec $r = \mathrm{rg}(p)$.
3. Montrer que U ou V est égal à $\{0\}$.

Exercice 30 – *Mines PC 2025 [2/10]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BAB = A$ et $ABA = B$.

1. Montrer que $A^2 = B^2$.
2. Montrer que A et B ont le même noyau et la même image.

Exercice 31 – *Centrale 2025 [5/10]*
Soit, pour $n \geqslant 2$, $P_n = X^n - X + 1$.

1. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle ; localiser cette racine dans un intervalle de longueur 1.
2. Déterminer les racines de P_n' en utilisant les racines n-èmes de l'unité.

3. Pour $n = 3$, $P_3(X) = X^3 - X + 1$. On note η_1, η_2, η_3 les racines de P_3.
   Calculer $\begin{vmatrix} 1+\eta_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\eta_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\eta_3 \end{vmatrix}$.

Exercice 32 – *Centrale 2025 [6/10]*
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker(M)$, $\mathrm{Im}(M)$, $\ker(M^2)$, $\mathrm{Im}(M^2)$. Ces deux derniers espaces sont-ils supplémentaires ?
   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   On pose $N(u) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \ker(u^k)$ et $C(u) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^k)$.
2. Montrer que $N(u)$ et $C(u)$ sont des sous-espaces et supplémentaires, stables par u, que l'endomorphisme induit par u sur $C(u)$ est un automorphisme, et que celui induit sur $N(u)$ est nilpotent.
3. Démontrer qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $N(u) = \ker(u^p)$ et $C(u) = \mathrm{Im}(u^p)$.
4. Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E stables par u tels que u induise un automorphisme de F et un endomorphisme nilpotent de G. Montrer que $F = C(u)$ et $G = N(u)$.

Exercice 33 – *Centrale 2025 [6/10]*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note J_k la matrice $\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Si M est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle indice de nilpotence de M le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n. Montrer que M est semblable à J_n.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $p \leqslant n$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 2 et de rang $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer que M est semblable à $\mathrm{diag}(J_2, \dots, J_2, 0_{n-r})$.

Exercice 34 – *Centrale 2025 [4/10]*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
2. Soit $v = \sum\limits_{k=0}^{p-1} u^k$. Montrer que v est un automorphisme et trouver v^{-1}.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(u)$.
4. Trouver le spectre de v.

Exercice 35 – *IMT 2025 [5/10]*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et non nuls tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer : $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.
2. Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et commutant deux à deux.
   Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 36 – *Navale 2025 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $D_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T + M = \mathrm{Tr}(M)A \right\}$.
Caractériser le sous-espace D_A et déterminer sa dimension.

Exercice 37 – *IMT 2025 [4/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$ et $AB = -BA$.

1. Montrer que A et B sont inversibles et diagonalisables.
2. Montrer que n est pair, puis que A et B sont semblables.

Exercice 38 – *CCINP 2025 [4/10]*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = (a_{i,j} + x)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On note $D(x) = \det(A(x))$.

1. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $D(x)$.
2. Montrer que $D(x)$ est un polynôme en x de degré au plus 1.
3. Dans le cas où $a_{i,i} = a$, $a_{i,j} = b$ pour $i > j$ et c pour $i < j$, calculer $\det(A)$.

Exercice 39 – *Mines 2024 [4/10]*
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Exercice 40 – *Centrale 2024 [3/10]*
Soit (P_n) la suite à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et, pour $n \geqslant 2$, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

1. Déterminer le degré de P_n. Étudier la parité de P_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}\cdot$
3. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 41 – *Centrale 2024 [5/10]*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \operatorname{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.
2. Montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.
   Indication : On pourra considérer $g : x \in \operatorname{Im}(f^k) \mapsto f(x)$.

Exercice 42 – *Centrale 2024 [4/10]*
Soit $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(C_1) + \operatorname{rg}(C_2)$.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{4} \operatorname{rg}(A_k)$.
3. Si $\operatorname{rg}(A_1) = \operatorname{rg}(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est-elle inversible ? Si oui, donner A^{-1}.

Exercice 43 – *Navale 2024 [4/10]*
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

2.3 Mais aussi

Exercice 44 – *Mines 2017 [6/10]*
On définit, pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) & \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & x & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est dérivable, et calculer D_n'.
2. En déduire la valeur de D_n.

Exercice 45 – *CCP 2016 [4/10]*
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. On note P le plan d'équation $x+y+z = 0$, D la droite d'équations $x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$, et p la projection sur P parallèlement à D.

1. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$. Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

Exercice 46 – *Mines 2016 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $A_{i,j} = \binom{i}{j}$ (nul si $j > i$). Déterminer l'inverse de A.

Exercice 47 – *IMT 2017 [5/10]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même défini par $f(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
4. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?

Exercice 48 – *TPE 2017 [5/10]*
Soient E un espace vectoriel de dimension $2p$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

$$\varphi^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim\left(\mathrm{Ker}\,(\varphi)\right) = p \tag{1}$$

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Im}\,(\varphi) \tag{2}$$

$$\text{Il existe une base dans laquelle la matrice de } \varphi \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \tag{3}$$

Exercice 49 – *Mines 2017 [8/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}$ son indice de nilpotence.

1. Montrer que $p \leqslant 3$.
2. On suppose que $p = 3$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On suppose que $p = 2$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 50 – *Mines 2018 [8/10]*
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^n = 0$.

1. Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Déterminer $\operatorname{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 51 – *Mines 2018 [4/10]*
Calculer le déterminant et la trace de la transposition (vue comme endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

2.4 Indications

Exercice 25 – Le noyau est l'ensemble des polynômes ayant les a_i comme racines doubles, donc multiples de $(X - a^2_{)}...(X - a_n)^2$: il y en a peu si $N < 2n$... Le théorème du rang permet de conclure. La condition nécessaire (dimensions égales au départ et à l'arrivée) est alors suffisante. Pour expliciter l'image réciproque, on cherche d'abord un polynôme dont l'image soit $(1, 0, ..., 0)$ (c'est facile), et un autre dont l'image soit $(0, 1, 0, ..., 0)$: c'est à peine plus difficile !

Exercice 26 – Pour le deuxième point, on peut supposer $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix}$ pour commencer/simplifier et regarder les deux premières colonnes de $M_1 + M_2$ (sous l'hypothèse (Y_1, Y_2) libre)...
On peut aussi, sous l'hypothèse (Y_1, Y_2) libre, choisir X orthogonal à Y_1 mais pas à Y_2 (il existe car $Y_1^\perp$ et $Y_2^\perp$ sont de même dimension et différents). En considérant MX on voit alors que X_2 est dans l'image de M. De même, X_1 est dans l'image de M.

Exercice 27 – Pivoter par bloc : $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B - A)$. Inversible si et seulement si A et $A - B$ est inversible. Dans ce cas, l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ peut donner une idée de l'inverse de M. Il reste à vérifier que $\begin{pmatrix} A^{-1}B(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$ fait le job.

Exercice 28 – $A = I + N$ puis binôme. Des considérations géométriques permettent de simplifier considérablement la recherche du commutant : $\operatorname{Ker}(A - I)$ et $\operatorname{Ker}((A - I)^2)$ sont forcément stabilisés par quelqu'un commutant avec A. Si ce quelqu'un avait deux valeurs propres différentes, il y aurait deux droites distinctes stables par A, ce qui n'est pas le cas... Bref, une telle matrice est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ Un calcul élémentaire nous dit alors que pour commuter avec A il suffit (on le savait en fait) et il faut : $d = b$. Bref, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$.

Exercice 29 – On décompose dans $U+V$ puis on compose à droite et à gauche par p pour obtenir $p\circ q = q\circ p = 0$, et il reste à mettre $p+q=\mathrm{Id}$ au carré. Ensuite, si $v\in\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ alors $v = v\circ p + v\circ q$ or $\mathrm{Im}\,(q)=\mathrm{Ker}\,(p)$ donc $v = v\circ p = -p\circ v$. On a alors $\mathrm{Im}\,v\subset \mathrm{Im}\,(p)=\mathrm{Ker}\,(q)$ donc $q\circ v = 0$ puis $v = p\circ v + q\circ v = p\circ v$ puis $v=0$. On dispose donc d'une injection de V dans $\mathcal{L}(\mathrm{Ker}\,(p), E)$, et on aimerait bien que ce soit une injection à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathrm{Ker}\,(p))$, ou encore : $\mathrm{Im}\,(\varphi(v))\subset\mathrm{Ker}\,(p)$. Regardons $p\circ\varphi(v) = p\circ v = -v\circ p$, donc pour $x\in\mathrm{Ker}\,(p)$ on a bien $p\circ\varphi(v)(x)=0$, et c'est gagné. Puisque $r\mapsto r^2+(n-r)^2$ prend la valeur n^2 en 0 et n (et donc seulement en ces points), l'égalité $\mathcal{L}(E)=U+V$ n'est possible que si r vaut 0 ou n, ce qui impose que U ou V vaut $\{0\}$ (si $r=0$ alors $p=0$ donc $q=\mathrm{Id}$ donc $p\circ\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\circ p = 0$ pour tout $p\in U$...).

Exercice 30 – C'est le B-A-BA... Pour les noyaux comme pour l'image, chaque inclusion est immédiate si on regarde la bonne relation.

Exercice 31 – Étude de fonction en discutant sur la parité de n. Lorsque n est pair il n'y a pas de racine et lorsque n est impair il existe une unique racine réelle, qui est située entre -2 et -1. Ensuite, le déterminant vaut $\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3+\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_2\eta_3 = -1-1=-2$ (relations coefficients-racines).

Exercice 32 – Une connaissance minimale des noyaux et images itérés est souhaitée/requise... leur monotonie et des considérations de dimensions nous assurent que ce sont des suites qui stagnent. Ensuite, sous l'hypothèse $N(u)=\mathrm{Ker}\,(u^p)$ et $I(u)=\mathrm{Im}\,(u^p)$, un vecteur y dans l'intersection s'écrit $u^p(x)$ et comme $u^p(y)=0$ on a $y\in\mathrm{Ker}\,(u^{2p})=\mathrm{Ker}\,(u^p)$ puis $y=0$ et on conclut avec le théorème du rang. Pour la dernière question, je travaillerais bien dans une base adaptée au problème, genre...

Exercice 33 – Ça tourne toujours autour de « si $u^p=0$ et $u^{p-1}\neq 0$ alors il existe x_0 tel que $\big(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre » ! Pour le dernier point : prendre une base (f_i) de l'image, prendre des antécédents de ces vecteurs par u, compléter (f_i) en une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, vérifier que la famille des vecteurs obtenue en recollant les trois familles précédentes est libre (elle a le bon cardinal !), et remettre ces vecteurs dans le bon ordre !

Exercice 34 – Par exemple (mais on peut le retrouver à la main : écrire $u(n)=\lambda x$ avec $x\neq 0$) : le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. Le calcul de $u\circ v$ va nous dire des choses... qui servent pour les questions 2 et 3. Enfin, on peut éventuellement travailler dans une base de trigonalisation de u : la matrice de v y est alors triangulaire.

Exercice 35 – On a bien entendu $\mathrm{Ker}\,(v)\subset\mathrm{Ker}\,(u\circ v)$ ce qui donne après théorème du rang : $\mathrm{rg}(u\circ v)\leqslant \mathrm{rg}(v)$. Mais peut-on avoir égalité ?
En appliquant le théorème du rang à la restriction w de u à $\mathrm{Im}\,(v)$ (souvent utile quand on veut comparer $\mathrm{rg}(u\circ v)$ et $\mathrm{rg}(v)$), on obtient : $\mathrm{rg}(v)=\mathrm{rg}(u\circ v)+\dim(\mathrm{Im}\,(u)\cap\mathrm{Ker}\,(v))$. Si on a $\mathrm{Im}\,(u)\cap\mathrm{Ker}\,(v)=\{0\}$ ça signifie que w est injectif, donc w^k n'est jamais nul, donc la restriction de u^k à $\mathrm{Im}\,(v)$ n'est jamais nulle : ça nie la nilpotence de u.
Ensuite, on doit pouvoir montrer par récurrence sur $k\in[\![1,n]\!]$ la proposition : « si $u_1, ..., u_k$ sont des nilpotents qui commutent deux à deux, alors $\mathrm{rg}(u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_k)\leqslant n-k$ » (Bref : à chaque nouvelle composition le rang diminue au moins de 1)
Pour l'hérédité, on fait bien attention à distinguer le cas où un nilpotent serait nul... ce qui impliquerait que la composée est nulle donc de rang $0\leqslant n-k$.

Exercice 36 – Il s'agit essentiellement de discuter : A est-elle symétrique ? Sinon c'est réglé. Si elle l'est, cherchons M sous la forme M_1+M_2 avec M_1 symétrique et M_2 antisymétrique. On sait déjà que si M_1 est solution, alors M_1+M_2 le sera pour toute matrice antisymétrique M_2, donc concentrons nous sur M_1 : on a nécessairement $M_1=\lambda A$; regardons la trace... et on sera amené à discuter selon que la trace de A vaut 2, 0 ou autre chose.

Exercice 37 – On peut invoquer le cours de seconde année (polynôme annulateur scindé à racines simples), mais aussi celui de première année sur les symétries, et leur caractérisation par la relation $f\circ f=\mathrm{Id}$. Pour montrer que ces deux matrices sont semblables, on peut montrer que dans les deux cas, les dimensions des deux directions propres sont égales à $n/2$.
Déjà (on peut s'en passer, mais c'est amusant/écœurant/scandaleux) : $\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(BA)$ d'une part, et $\det(-BA)=(-1)^n\det(BA)$ d'autre part, donc (ces déterminants étant non nuls) $(-1)^n=1$ et n est bien pair !

La relation $AB=-BA$ dit que si $AX=X$ alors $A(BX)=-BX$. (L'application canoniquement associée à) B injecte donc $\mathrm{Ker}\,(A-I_n)$ dans $\mathrm{Ker}\,(A+I_n)$, mais la réciproque est vraie, donc ces deux sous-espaces (supplémentaires) sont bien de même dimension. Finalement, A, mais aussi B, est semblable à $\begin{pmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & I_{-n/2} \end{pmatrix}$

Exercice 38 – Retrancher la première colonne à toutes les autres, puis développer selon la première colonne. Ensuite, considérer $D(-b)$ et $D(-c)$. Cela permet de retrouver $D(0)$ si $b \neq c$ (écrire $D(-b) = \alpha(-b)+\beta$ et $D(-c)=\alpha(-c)+\beta$ pour retrouver β). Dans le cas $b=c$ on connaît $D(b)=0$ et $D(-b)$.

Exercice 39 – Une éventuelle racine B serait nilpotente puisque $B^6=0$, donc $B^3=0$ (toujours ce petit résultat technique : l'indice de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace de travail), donc $B^4=0$, donc $A^2=0$, ce qui est faux.

Exercice 40 – P_n est unitaire de degré n, et a la parité de n. La question suivante est une simple récurrence... double. On peut en déduire que $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$ pour tout θ, ce qui fournit n racines distinctes dans $[-2,2]$...

Exercice 41 – La première question est dans le cours de première année (et de deuxième aussi) et la seconde est dans le cours de seconde année (et souvent dans celui de première année !). Le théorème du rang appliqué à la restriction nous donne : $\mathrm{rg}(f^k)-\mathrm{rg}(f^{k+1}) = \dim\big(\mathrm{Im}\,(f^k)\cap \mathrm{Ker}\,(f)\big)$.

Exercice 42 – Le rang r de A d'une matrice est le nombre de colonne maximal d'une sous-matrice $(2n,r)$ de A constituée de colonnes linéairement indépendantes... fournissant des sous-matrices de colonnes libres de C_1 et C_2. Le même argument sur les lignes dit que $\mathrm{rg}(C_1) \leqslant \mathrm{rg}(A_1)+\mathrm{rg}(A_2)$. Dans la dernière question, le déterminant de A est non nul, et on peut chercher l'inverse de A par un calcul par bloc. On trouvera $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4 \\ 0 & A_4^{-1} \end{pmatrix}$

Exercice 43 – Les deux implications se font de façon assez basique, pour peu qu'on adopte la méthodologie post-bac : se concentrer sur « où vais-je ? » plutôt que « où suis-je ? »

Exercice 44 – $(\det(C_1(x),...C_n(x)))' = \det(C_1'(x),C_2(x),...,C_n(x)) + \cdots + \det(C_1(x),...,C_{n-1}(x),C_n'(x))$...

Exercice 45 – Notons $v=(1,3,2)$ et $\varphi : (x,y,z)\mapsto x+y+z$. L'hyperplan $P=\mathrm{Ker}\,\varphi$ et la droite $D=\mathrm{Vect}(v)$ sont d'intersection nulle car $\varphi(v)\neq 0$ donc (dimensions) supplémentaires (vous savez encore le montrer ?). Ensuite, à $u=(x,y,z)$ fixé il s'agit de déterminer (après dessin) l'unique λ tel que $u-\lambda v\in P=\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, et on a alors $p(u)=u-\lambda v$. À la fin, on augmente sa note de un point en vérifiant que la matrice obtenue est (ou n'est pas !) de trace égale à ce qu'il faut (à savoir ?).

Exercice 46 – Quelle est donc la matrice de $P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 47 – $u\circ v=0$ si et seulement si l'image de v est incluse dans le noyau de u...

$$M\in \mathrm{Ker}\,(f) \iff \mathrm{Im}\,(M)\subset \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1\end{pmatrix}\right) \iff \exists \alpha,\beta;\ M=\begin{pmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}\,(f)$ est donc de dimension $4-2=2$ et contient $A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ qui sont non colinéaires. Ensuite, on prend un élément générique de l'image (sous forme paramétrique) et on observe s'il peut être dans le noyau :

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&2b\\2a&4b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5a&10b\\10a&20b\end{pmatrix} = 0 \iff a=b=0$$

L'image et le noyau sont d'intersection nulle, donc sont supplémentaires.

Exercice 48 – Il me semble que (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) ne posent pas (trop) de problème. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), j'appliquerais le théorème du rang en regardant dans les yeux l'inclusion $\mathrm{Im}\,(\varphi)\subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Enfin pour (2) $\Rightarrow$ (3) je serais tenté de travailler dans une base adaptée constituée d'une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ qu'on complète en une base de E.

Exercice 49 – Comme toujours, on prend X_0 tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$, et on sait/prouve alors que $(X_0, ..., A^{p-1}X_0)$ est une famille libre. Les questions 1 et 2 tombent alors gratuitement. Dans le cas $p = 2$, on complète (X_0, AX_0) en prenant un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(A)$ (de dimension 2) non colinéaire à AX_0. Pour le dernier point, le sens direct est facile ($\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(-A) = -\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A)$ donc la trace et le déterminant de A sont nul(le)s). Pour la réciproque il faut un peu plus travailler en notant que 0 est dans le spectre (déterminant nul).

— S'il y a une autre valeur propre (non nulle, donc) α, alors (regardons la trace !) $-\alpha$ est aussi valeur propre, et A possède 3 valeurs propres distinctes donc est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, elle-même semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ donc à $-A$.

— Si 0 est l'unique valeur propre, alors (on est sur $\mathbb{C}$!) le polynôme caractéristique est X^3, donc (Cayley-Hamilton) A est nilpotente, et on est ramené aux deux matrices des questions précédentes, dont il n'est pas difficile de voir qu'elles sont effectivement semblables à leur opposé (raisonner géométriquement en bricolant la base canonique de $\mathbb{R}^3$...).

Exercice 50 – Le sous-espace engendré par $\mathcal{N}$ contient déjà toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $i \neq j$; il est par ailleurs (les matrices nilpotentes sont trigonalisables...) inclus dans $\mathcal{H}$ donc de dimension au plus $n^2 - 1$. On montre l'égalité en notant en dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui va nous fournir $n-1$ nouvelles matrices linéairement indépendantes des précédentes dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 51 – Puisque la transposition est involutive (transposé de la transposée...), il s'agit d'une symétrie, dont le déterminant et la trace se déduisent facilement de la dimension des sous-espaces propres, qui sont des sous-espaces connus de dimensions connues...

Chapitre 3

Réduction

3.1 Rappels de cours

Directement du cours :

- Les sous-espaces propres sont en somme directe. [SIGNIFICATION, PREUVE]
- Définition(s) de la diagonalisabilité pour un endomorphisme/une matrice. [DÉFINITION(S)] Équivalence des différentes définitions.
- Diverses conditions nécessaires/suffisantes de diagonalisabilité/trigonalisabilité :
  - Si A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé (réciproque fausse).
  - Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable (réciproque fausse).
  - A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et les sous-espaces propres ont leurs dimensions égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - A est diagonalisable si et seulement si A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
  - A est trigonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé. En particulier, c'est toujours le cas sur $\mathbb{C}$.

Proche du cours :

- Réduction des endomorphismes et matrices de rang 1 (et leurs cousin(e)s).
- Quand deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Application aux équations polynomiales.

3.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 52 – *Mines 2025 [3/10]*
Soit $n \geqslant 2$. Soit Δ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(n, n-1, \ldots, 1)$. Déterminer l'ensemble des matrices semblables à Δ et qui commutent avec Δ.

Exercice 53 – *Mines 2025 [5/10]*

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable puis diagonaliser A.

Exercice 54 – *Mines 2025 [6/10]*
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in E$. On pose $f_A : M \in E \mapsto AM$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $B \in E$ tel que $P(f_A) = f_B$.
2. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
3. Exprimer les valeurs propres et les espaces propres de f_A en fonction de ceux de A.

Exercice 55 – *Mines 2025 [5/10]*

1. On considère le polynôme $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$. Montrer que $P(2) = P'(2) = 0$ et en déduire une factorisation de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 - 4M^4 + 2M^3 + 8M^2 - 8M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Exercice 56 – *Mines PC 2025 [7/10]*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 57 – *Centrale 2025 [4/10]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A semblable à $2A$. Que peut-on dire de χ_A ? Montrer que A est nilpotente.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $2A$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à $2A$.

Exercice 58 – *Centrale 2025 [4/10]*
Soient $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Rappeler la formule de Taylor pour $P \in E$ et $a \in \mathbb{R}$; la démontrer dans le cas $a = 0$.
2. Soit $P \in E$.
   Montrer qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)Q(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)dt$.
3. On note f l'application qui à P associe Q. Montrer que f est un endomorphisme de E diagonalisable.

Exercice 59 – *Centrale 2025 [7/10]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Montrer que, si A nilpotente, alors f l'est également.
2. Montrer que, si $\big|\mathrm{Sp}(A)\big| = n$, alors $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
3. Montrer que si A est diagonalisable alors A^T l'est également. Donner une base de vecteurs propres de f dans ce cas.

Exercice 60 – *Centrale 2025 [6/10]*

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $u \neq 0$, $v \neq 0$ et $u \circ v = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$ et que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v. En déduire que u et v possèdent un vecteur propre en commun.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

Formulation détestable, avec la confusion matrices/applications linéaires...

Exercice 61 – *CCINP 2025 [4/10]*

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de J. En déduire les valeurs propres éventuelles de M.
2. Trouver un polynôme annulateur de M. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer les matrices M solutions.

Exercice 62 – *IMT 2025 [3/10]*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(A^k) = kA^k$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 63 – *CCINP 2025 [3/10]*

Soit $\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A^3 + 4A^2 + 5A = 0 \right\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que A est diagonalisable ? Justifier.
2. Quelle relation peut-on écrire entre les racines d'un polynôme annulateur de A et ses valeurs propres ?
3. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}$.

Exercice 64 – *CCINP 2025 [4/10]*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $v \in E \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$. Déterminer le rang de f et son éventuelle diagonalisabilité.

Exercice 65 – *IMT 2025 [3/10]*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
Montrer que $(\operatorname{Tr}(A))^2 \leqslant \operatorname{rg}(A)\ \operatorname{Tr}\left(A^2\right)$.

Exercice 66 – *CCINP 2025 [7/10]*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, vérifiant $u^3 = u^2$, $u \neq \mathrm{Id}$, $u^2 \neq u$ et $u^2 \neq 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$.
2. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E, x \neq 0$, tel que $u(x) = 0$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer de même que 1 est une valeur propre de u.
4. Montrer que $E = \ker\left(u^2\right) \oplus \operatorname{Im}\left(u^2\right)$ et que $\operatorname{Im}\left(u^2\right) = \ker\left(u - \mathrm{Id}_E\right)$.
5. Soient $p = \dim\left(\ker\left(u - \mathrm{id}\right)\right)$, $r = \dim(\ker(u))$ et $q = n - p - r$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A une matrice quelconque.

Exercice 67 – *CCINP 2025 [4/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. Citer deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice carrée réelle soit diagonalisable.
2. Montrer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2, 3\}$. On notera D une matrice diagonale associée.
3. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto DM - MD$. Montrer que f est un endomorphisme et que f est diagonalisable. *Ind.* Écrire M et D sous forme de matrices par blocs.

Exercice 68 – *Mines 2024 [6/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le spectre de A et ses espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$.
3. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT = TM$. Quelle est sa structure ? sa dimension ?
4. Trouver l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 69 – *IMT 2024 [3/10]*
Soient $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 0 est valeur propre de A.
2. Montrer que X est un vecteur propre de A.
3. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 70 – *Mines PC 2024 [7/10]*
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$.
On pourra montrer qu'il existe une base de l'espace adaptée en même temps aux deux endomorphismes canoniquement associés à A et B.

Exercice 71 – *X PC 2024 [2/10]*
Soient $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 72 – *CCINP 2024 [4/10]*
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice M_α est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang de M_α.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $M_{-1} = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M_{-1}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \Delta$. Montrer que $B\Delta = \Delta B$.
6. En déduire les solutions $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $B^2 = \Delta$.
7. En déduire les solutions $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $A^2 = M_{-1}$.

Exercice 73 – *Centrale 2024 [8/10]*
Soient a, b, c des réels tels que $a + b + c = 1$.

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Montrer qu'il existe u de module 1 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels positifs tels que $z_1 = \alpha_1 u$, $z_2 = \alpha_2 u$ et $z_3 = \alpha_3 u$.
2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver ses valeurs propres.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Quelle est la limite de la suite $(M^n)_{n \geqslant 1}$?

Exercice 74 – *Centrale 2024 [7/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_2$.
On note $d = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_2\}$.

1. Montrer que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont de module égal à 1 et : $|\mathrm{tr}(M)| \leqslant 2$.
2. On suppose que les valeurs propres de M sont toutes réelles. Donner les valeurs possibles de d.
3. On suppose que les valeurs propres de M sont toutes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que M a pour polynôme annulateur $X^2 + 1$, $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + X + 1$. Donner les valeurs possibles de d.

3.3 Mais aussi

Exercice 75 – *Colles 2023-2024 [3/10]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB est diagonalisable et A est inversible. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 76 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer le commutant de D (ce qu'on imagine) puis de A.

Exercice 77 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 78 – *Colles 2023-2024 [6/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 79 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. On note E_X l'ensemble des matrices ayant X comme vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Donner la dimension de E_X.
3. Expliciter E_X lorsque $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 80 – *Centrale 2018 [1/10]*
Donner une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 81 – *Centrale 2018 [7/10]*
Soit $n \geqslant 2$, et A une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'équation $B^2 = A$.

1. Résoudre cette équation lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. Dans le cas général (au sens : n quelconque), discuter le nombre de solutions.

Exercice 82 – *Mines 2018 [8/10]*
Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & (0) & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple (portant sur χ_A) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 83 – *Mines 2018 [7/10]*
Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension fine. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$ si et seulement si $u \in \operatorname{Vect}\{u^k\,, k \geqslant 2\}$.

Exercice 84 – *Mines 2018 [7/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices réelles (n, n) à coefficients dans $[0, 1]$ dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

1. Expliciter une valeur propre et un vecteur propres commun(ne)s à toutes les matrices de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.
3. Soit $A \in \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module $\leqslant 1$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(A - I_n) = \operatorname{Ker}((A - I_n)^2)$.

Exercice 85 – *Mines 2016 [7/10]*
Déterminer $\big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ M^5 = M^2 \text{ et } \operatorname{tr} M = n\big\}$.

Exercice 86 – *ENSEA 2016 [3/10]*

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est elle diagonalisable ?
2. Déterminer la limite de A^n quand n tend vers l'infini.

Exercice 87 – *Mines et ENSAM 2018 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Trouver le signe de $\det(A)$.

Exercice 88 – *Centrale 2018 [5/10]*
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, et E_x l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ admettant x comme vecteur propre.
Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel, et déterminer sa dimension.

Exercice 89 – *Centrale 2018 [7/10]*

1. Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont exactement les racines troisièmes de l'unité.
   Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. On fixe par ailleurs $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (n est un entier $\geqslant 3$).
2. On suppose ici que 1 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Montrer que n est pair.
   (b) Exprimer A^2 à l'aide de A et I_n.
   (c) Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue X.
3. On suppose enfin que 1 est valeur propre de A. Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue X.

Exercice 90 – *Mines 2018 [4/10]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^4 + 2A^2 + A = 0$. Montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Qu'en déduire sur A ?

Exercice 91 – *Mines 2018 [6/10]*
Déterminer les $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Exercice 92 – *Mines 2018 [7/10]*

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à spectre disjoints.
   (a) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = DB - AD$.
   (b) Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables. La matrice N est-elle diagonalisable ?
3. Commenter le cas $n = 1$.

3.4 Indications

Exercice 52 – Les éléments diagonaux étant distincts, le commutant est l'ensemble des matrices diagonales (calcul ou considérations géométriques sur les sous-espaces propres de l'un qui sont stables par l'autre). L'égalité des spectre impose alors les éléments diagonaux : il y a $n!$ matrices semblables qui commutent.

Exercice 53 – A est symétrique réelle donc diagonalisable, et est de rang 2 (et une base du noyau est facile à trouver), donc on cherche les deux dernières valeurs propres (comptées avec multiplicité). On a $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = 1$ et $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \mathrm{tr}(A^2) = 2n - 1$ donc $2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2)^2 = 2(1 - n)$. On a donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - X + (1 - n)$, ce qui nous donne les deux autres valeurs propres, qui sont distinctes, et on peut chercher des vecteurs propres sous la forme $(1, ..., 1, \alpha)$, vu la tête de A donc de son image...

Exercice 54 – $P(f_A) = f_{P(A)}$, et ensuite on s'intéresse à des polynômes scindés à racines simples annulant une matrice ou un endomorphisme diagonalisable (attention à bien distinguer A qui est une matrice et f_A qui est un endomorphisme). Si A est diagonalisable alors la base canonique $(E_{i,j})$ est une base de diagonalisation de f_A. Si $A = PDP^{-1}$ je m'intéresserais bien à $(PE_{i,j}P^{-1})$...

Exercice 55 – $P = X(X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$. Si c'est un annulateur de M alors M est trigonalisable. En regardant la trace, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ assure que 2 n'est en fait pas valeur propre. On a donc $(A - 2I)^2$ inversible, donc $X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est annulateur, donc A est diagonalisable, le spectre étant inclus dans $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, les multiplicités de $\pm\sqrt{2}$ étant égales (toujours grâce à la trace). Difficile d'en dire plus que cette condition nécessaire (clairement suffisante).

Exercice 56 – Après avoir calculé B^2 et éventuellement B^3, on a compris que pour un polynôme P on a $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$. Pour que B soit diagonalisable, il est nécessaire qu'elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, disons P_0. On aura alors $P_0(A) = 0$ (donc A est diagonalisable) mais aussi $AP_0'(A) = 0$. Or les racines de P_0 sont simples donc P_0' ne possède aucune racine qui est valeur propre de A, donc [1] $P_0'(A)$ est inversible, donc $A = 0$. Cette condition nécessaire semble assez suffisante.

Exercice 57 – Cayley-Hamilton dans le sens indirect, trigonalisation sur $\mathbb{C}$ dans le sens direct (ou encore : la seule valeur propre complexe est nulle). Si A est semblable à $2A$ et λ est une valeur propre de module maximal de A alors 2λ est valeur propre de $2A$ donc de A, donc $2\,|\lambda| \leqslant |\lambda|$ donc $\lambda = 0$ et on est ramené à la première question. Ensuite, si A est la matrice de u dans (e_1, e_2) alors la matrice de u dans $(e_1, e_1/2)$ est... Et pour la dernière question on sait qu'il existe un vecteur x tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base... dans laquelle la matrice de u est simple, et on adapte ce qu'on a fait à la question précédente. Attention néanmoins à bien géométriser, distinguer matrices et applications linéaires !

Exercice 58 – Qui justifiera proprement l'unicité ? Matrice dans la base canonique, et on se souvient de l'extension de la formule $a^2 - b^2 = \cdots$ à $a^n - b^n = \cdots$ n'est-ce pas ?

Exercice 59 – Ce n'est pas indispensable, mais je trouve éclairant d'écrire $f = f_1 - f_2$, avec f_1 et f_2 deux applications linéaires qui commutent et dont on connaît les puissances. Bref, $f^{2n} = 0$.
Si A est non pas diagonalisable mais diagonale à spectre simple, le calcul de $AM - MA$ nous dit que le noyau de f est l'ensemble des matrices diagonales, qui est aussi l'ensemble des polynômes en A (interpolation de Lagrange), et le passage de diagonale à diagonalisable se fait normalement sans mal.
Enfin, si $(X_1, ..., X_n)$ est une base de diagonalisation de A et $(Y_1, ..., Y_n)$ alors la famille de matrice $(X_i Y_j^{\mathrm{T}})_{i,j}$ est libre (raisonnable, mais à établir soigneusement !) donc est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et diagonalise f.

Exercice 60 – Si u était injective, elle serait bijective donc on aurait $v = 0$. Ensuite, v induit en endomorphisme de $\mathrm{Ker}\,(u)$, et l'endomorphisme induit possède forcément une valeur propre... car on travaille sur le corps $\mathbb{C}$. Un vecteur propre de la restriction de v à $\mathrm{Ker}\,(u)$ est aussi vecteur propre pour u puisqu'il est dans son noyau !
Pour la suite, récurrence sur la dimension : on trouve dans un premier temps P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda & L_2 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ On a toujours $A_1 B_1 = 0$ donc (en ayant supposé ce qu'on imagine) il existe $P_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $P_1^{-1} A_1 P_1 = T_1$ et $P_1^{-1} B_1 P_1 = T_2$ soient triangulaire. La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ est alors inversible d'inverse ce qu'on pense, et en prenant $R = PQ$ on aura $R^{-1}AR$ et $R^{-1}BR$ triangulaires.

1. Décomposer P' en facteur de degré 1 sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 61 – C'est une bonne idée (en pensant à la fin de l'exercice) de tout de suite géométriser. Si on note m et j les applications linéaires canoniquement associées à m et j, alors on a facilement une base de diagonalisation de j, puis $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
L'hypothèse $M^2 + M = J$ impose que M et J commute, donc m et j aussi, donc les sous-espaces propres de j (qui ont le bon goût d'être des droites) sont stables par m, ce qui se traduit par le fait que la matrice de m dans la base de diagonalisation de j est également diagonale, les éléments diagonaux vérifiant respectivement $\lambda^2 + \lambda = 0$ et $\lambda^2 + \lambda = 2$, donc $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = 0$ ou -1, et $\lambda_2 = 1$ ou -2, ce qui nous donne 4 solutions possibles à la fin de l'analyse. La synthèse est immédiate : ces 4 candidats sont bien des solutions !
Au passage, on a oublié la question 2 : puisque $J^2 = 2J$ on a $(M^2 + M)^2 = 2(M^2 + M)$, ce qui nous donne comme polynôme annulateur de m :

$$(X^2 + X)^2 - 2(X^2 + X) = (X^2 + X)(X^2 + X - 2) = X(X + 1)(X - 1)(X + 2)$$

et les racines de ce polynôme nous rassurent, non ?
Cet exercice est posé un peu n'importe comment...

Exercice 62 – On voit tout de suite que c'est une récurrence, mais on peut facilement tourner en rond (ça m'est déjà arrivé et c'est très pénible !). Je suggère d'écrire $AB = BA + A$ et d'en déduire que $A^2B = BA^2 + 2A^2$ avant d'aller plus loin. Ensuite, si tous les A^k étaient non nulles alors f posséderait une infinité de valeurs propres.

Exercice 63 – Les matrices symétriques réelles ont tendance à être diagonalisable. Ensuite, le spectre d'une matrice est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. Mais $X^2 + 4X + 5$ n'a pas de racine réelle, donc le spectre est réduit à $\{0\}$, puis $A = 0$. Et la réciproque est vraie.

Exercice 64 – L'image de f est non nulle et incluse dans $\mathrm{Vect}(v)$: le rang vaut 1. Les savants annoncent que f est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle ; certes mais pourquoi ? On va discuter sur le fait que v est ou pas dans le noyau de v. Dans le premier cas, on a $f^2 = 0$ donc f n'est pas diagonalisable (sans quoi $f = 0$, puisque 0 serait la seule valeur propre) et dans le second cas $E = \mathrm{Vect}(v) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$, ce qui nous donne une base de diagonalisation.

Exercice 65 – $A = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0)P^{-1}$ puis Cauchy-Schwarz.

Exercice 66 – $\mathrm{Sp}(u) \subset Rac(P)$ où $P = X^3 - X^2$ est un polynôme annulateur. Si u est de noyau nul alors u est bijective, puis $u = \mathrm{Id}$. De même si 1 n'est pas valeur propre alors $u - \mathrm{Id}$ est inversible, or $(u - \mathrm{Id}) \circ u^2 = 0$... D'après le théorème du rang, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^2) \cap \mathrm{Im}\,(u^2) = \{0\}$, ce qui se fait bien. Même chose pour les deux autres inclusions de la question 4 : on garde en tête que quand $x \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$, on a $u(x) = x$.
On a $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2)$ et par ailleurs $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2)$. Il est donc tentant de trouver un supplémentaire F à $\mathrm{Ker}\,(u)$ dans $\mathrm{Ker}\,(u^2)$, écrire $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u) \oplus F$ puis prendre une base adaptée à cette décomposition. Mais la matrice de u dans cette base est alors $\begin{pmatrix} I_p & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$
Un dernier effort ! Si $x \in \mathrm{Ker}\,(u^2)$ alors $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(u)$, donc en fait A_1 et A_3 sont nulles.
A_2 peut-elle être quelconque ? Certainement pas ! Elle ne peut pas être nulle par exemple...

Exercice 67 – Existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien caractère scindé du polynôme caractéristique, avec les sous-espaces propres ayant la bonne dimension. La question 2 se traite alors facilement (le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur). En travaillant par bloc, on voit que les $E_{i,j}$ vont constituer une base de diagonalisation de f, associées aux valeurs propres 0, 1 ou -1.

Exercice 68 – $\chi_A = X(X - 1)^2$ et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1. Pour compléter le début de base qu'on imagine, on peut chercher f_3 tel que $u(f_3) = f_3 + f_2$ par exemple, ou bien prendre un f_3 quelconque (mais non colinéaire à f_2) dans $\mathrm{Ker}\,((u - \mathrm{Id})^2)$. Le commutant de T peut se déterminer par méthode brutale... ou être accéléré par des considérations de stabilité : il y a deux droites et un plan qui sont stables... Bref ou trouvera les $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

Enfin, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ met certainement en bijection le commutant de ... et celui de ...

Exercice 69 – On dispose des valeurs propres 0 et $-1+j$. On trouve la troisième (notion à préciser) via la trace, ou bien en notant que $AX = \lambda X$ implique (lorsque A est à coefficients réels) : $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$.

Exercice 70 – a et b sont des projections. On a en particulier $E = \mathrm{Im}\,(a) \oplus \mathrm{Ker}\,(a)$. Mais a et b commutent, donc b induit un endomorphisme sur ces deux sous-espaces. Et ces endomorphismes restent des projections (la relation $b^2 = b$ passe aux restrictions) donc on peut en trouver des bases diagonalisant les restrictions de b. En recollant ce deux bases on a ce qu'on veut.

Notons que via la caractérisation de la diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, on montre par le même procédé que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables.

Exercice 71 – Heu, celui qui est tombé sur cet exercice a probablement raconté beaucoup de bêtises avant ! Il me semble que la réduction de $A + I$ doit prendre moins d'une minute (partons sur 3 minutes si on n'est pas réveillé)... A est finalement semblable à $\mathrm{Diag}(-1, -1, ..., -1, n-1)$.

Exercice 72 – Mais que cet énoncé est poussif... Les valeurs propres comptées avec multiplicité sont $1, 4$ et $\alpha + 1$. Il s'agit donc d'observer les cas où $\alpha + 1$ vaut 1 où 4 : on s'intéresse alors à **la dimension** du sous-espace propre associé à la valeur propre double... et pour cela il suffit de calculer un rang. Ensuite, commutant d'une matrice diagonale à éléments diagonaux distincts, puis mini analyse-synthèse : on trouve 4 solutions.

Exercice 73 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire... La réduction de J fournit celle de $M = aI + bJ + cJ^2$, et on aura $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L = P\mathrm{Diag}(1,0,0)P^{-1}$ d'après la première question. On peut calculer P et P^{-1} à (relativement) moindre frais, mais on peut aussi (c'est malin) noter que M a ses colonnes (mais aussi lignes) de somme constante égale à 1, donc il en sera de même de ses puissances (cette relation est caractérisée par $MX = X$ avec X bien choisie) puis de la limite de (M^n). Par ailleurs, L est de rang 1. Toutes ses colonnes sont donc colinéaires puis égales (puisque la somme de leurs coefficients vaut 1). Mais il en est de même pour les colonnes. La seule possibilité est : $L = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Exercice 74 – $X^d - 1$ est un polynôme annulateur aux racines bien connues. Puisque la trace est réelle, il faut que les deux valeurs propres soient conjuguées, ce qui impose leur produit, mais aussi majore le module de leur somme. Comme cette somme est réelle, on a vite fait le tour des possibilités.

Au fait : $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - (\lambda + \overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda}$...

On peut classiquement en déduire que $A^{12} = I_2$ (c'est souvent cette question qui est posée, avec plus ou moins d'indications !)

Exercice 75 – Ack affreux : $BA = A^{-1}(AB)A$.

Exercice 76 – $\chi_A = X(X-1)(X-4)$. Pour le commutant, on géométrise ou pas (commuter avec une diagonale à spectre simple est assez contraignant).

Exercice 77 – On $\chi_A = X(X^2 - (ab + ac - bc))$. Il reste à discuter de la position de $ab + ac - bc$ par rapport à 0...

Exercice 78 – Trigonaliser, et obtenir un système « à la Vandermonde » sur les valeurs propres et leurs multiplicités. Finalement il ne peut y avoir qu'une valeur propre, qui est nulle.

Exercice 79 – On complète X en une base de $\mathbb{R}^n / \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, fournissant une matrice de passage P telle que : $M \in E_X$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & N \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Pour l'application numérique on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

Exercice 80 – J'imagine que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ doit fonctionner...

Exercice 81 – Après diagonalisation (n valeurs propres distinctes), faire une analyse-synthèse géométrique... ou matricielle ! On trouvera 2^n solutions.

Exercice 82 – Pour que A soit diagonalisable, il est évidemment suffisant que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ soit scindé à racines simples... mais c'est également nécessaire. En effet si A était diagonalisable avec $p < n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$, alors $P = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_p)$ serait annulateur de A. Mais si on regarde la première colonne de $P(A)$ (après avoir calculé A^2, A^3...) on voit que c'est impossible. *En termes snobs on dit que χ_A est ici le* polynôme minimal *de A.*

Exercice 83 – Dans le sens direct : la matrice de u dans une base adaptée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B inversible. Le polynôme $X\,\chi_B$ est alors annulateur de u ; or il vaut $\pm\det(B)X + \alpha_2 X^2 + \cdots$
Pour la réciproque, c'est plutôt plus simple (dimension et intersection réduite à 0).

Exercice 84 – Je trouve ça un peu difficile sans indication (la dernière question ; les précédentes ayant été traitées quelques fois dans l'année...). J'ai choisi X dans le noyau de $(A - I)^2$: $(A^n X)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, mais en écrivant $A = I + (A - I)$ et en Newtonisant on obtient $A^n X = X + n(A - I)X$...

Exercice 85 – Analyse : une éventuelle solution M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, avec sur la diagonale 0, 1, j et j^2. Pour que la somme de ces valeurs diagonales soit égale à n il est nécessaire que tous soient égaux à 1. On a alors $M = I + N$ avec N nilpotente, puis $(I_n + N)^2 = (I + N)^5$ puis par binomisation et liberté : $N = 0$. Ainsi, $M = I_n$. La synthèse semble abordable.

Exercice 86 – Il existe bien entendu (quatre valeurs propres distinctes en dimension quatre) P inversible telle que $A = P\,\mathrm{Diag}(0, 1/3, 2/3, 1)P^{-1}$, et on a alors

$$A^n = P\,\mathrm{Diag}(0, (1/3)^n, (2/3)^n, 1)P^{-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P\,\mathrm{Diag}(0, 0, 0, 1)P^{-1}.$$

Fallait-il déterminer P et P^{-1} ? Ce n'est pas mortel (par exemple $u(e_2 + e_1/3) = e_2 + e_1/3$, etc...), mais bon...

Exercice 87 – $X^3 - X - 1$ possède trois racines : l'une est strictement positive, et les deux autres sont des complexes conjugués. On peut alors diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Puisque la trace est nulle, les multiplicités des complexes conjugués sont égales...

Exercice 88 – Compléter x en une base de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la forme des matrices des éléments de E_x dans cette base ?

Exercice 89 – $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ doit convenir. Ensuite, trigonaliser A et regarder la trace (j et son conjugué ont même multiplicité), puis $(A - I)(A^2 - A + I) = 0$ avec $A - I$ inversible. Pour la dernière question, il faut distinguer, selon que $-B$ est ou non dans l'image de $A - I$ (qui n'est pas injectif donc pas surjectif).

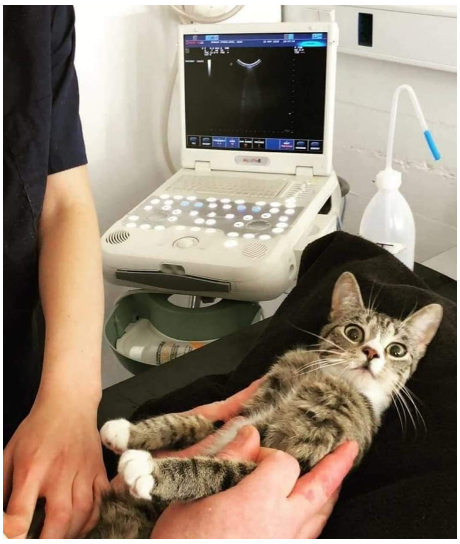
Exercice 90 – Le polynôme annulateur $X(4X^2 + 2X + 1)$ est scindé et ses racines sont simples et de module strictement majorées par 1... Il existe alors k tel que $A^k = 0$ (dès que tous les coefficients sont majorés en module par 1/2).
À la relecture de mon corrigé je réalise qu'on peut aller bien plus loin : en fait A est nécessairement nulle ! Supposons en effet que ce n'est pas le cas, prenons $r > 1$ le plus petit entier tel que $A^r = 0$ (il est donc $\geqslant 1$) et multiplions $4A^2 + 2A + I_n$ par A^{r-1}...

Exercice 91 – Il est nécessaire que les valeurs propres soient de module égale à 1, et si la matrice n'est pas diagonalisable alors $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être bornée. Enfin, si A possède une valeur propre non réelle, son conjuguée est également valeur propre, donc A est semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ donc à $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Je ne sais pas jusqu'où veut aller celui qui a posé l'exercice.

Exercice 92 – Pour l'injectivité, sans indication, je suppose $DB = AD$ et je prends X un vecteur propre de B. Puisque $DBX = ADX = \lambda DX$ et que λ n'est pas vecteur propre de A, cela impose $DX = 0$. Mais ceci est vrai sur une base de vecteurs propres (B est diagonalisable) donc $D = 0$.

Chapitre 4

Probabilités



4.1 Rappels de cours

Directement du cours :

— Axiomatique des espaces probabilisés ; probabilité d'une intersection décroissante d'événements.
— Formule de Bayes. [PREUVE]
— Lois classiques, avec leur espérance (et variance si possible...).
— Markov, Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres. [PREUVES]
— Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. [PREUVE] Savoir (retrouver) l'expression de l'espérance et de la variance de X à l'aide de $\mathcal{G}_X$.
— Somme de Poissons indépendantes. [PREUVE]

Proche du cours :

— Avoir les bons réflexes face à une chaîne de Markov (matrice stochastique, 1 est valeur propre...).
— Loi d'un maximum : $(X \leqslant n) = \cap(X_i \leqslant n)$...
— Espérance d'un cardinal : passer par une somme de variables de Bernoulli dont l'espérance est simple à calculer.

4.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 93 – *Mines 2025 [4/10]*
On dispose d'une station d'appels. Le nombre d'appels entre 10 h et 11 h est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour qu'un appel concerne le standard A est $p \in [0,1]$. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant choisi le standard A entre 10 h et 11 h. Donner la loi de Y.

Exercice 94 – *Mines 2025 [5/10]*
Soient E un espace euclidien et $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $X = \|X_1 u_1 + \cdots + X_n u_n\|^2$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n\| \leq \sqrt{n}$.

Exercice 95 – *Centrale 2025 [9/10]*

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$.
2. Soit (X_k) une suite i.i.d. de variables de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   On pose $N = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}^*,\ X_k > X_0\} \in [\![1, +\infty[\![$ Montrer que N est une variable aléatoire.
3. L'espérance de N est-elle finie ?

Exercice 96 – *Centrale 2025 [8/10]*
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série $\sum \dfrac{1}{n \ln^4(n)}$ converge.
2. (a) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant \dfrac{3n^2}{a^4}$.
   (b) On pose $A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{+\infty} \left(|S_m| < m^{\frac{3}{4}} \ln(m)\right)$. Montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.
3. Montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{3/4} \ln(n)}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 97 – *Centrale 2025 [6/10]*
Soient $\lambda > 0$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et X, Y indépendantes.
On pose $A = \begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $T = \operatorname{tr}(A)$.

1. Donner la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathbf{P}(A \text{ diagonalisable})$.
3. On pose $M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et $\ell_{x,y} : M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mapsto M_{x,y} M$.
   (a) Que peut-on dire du rang de $\ell_{x,y}$?
   (b) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{rg}(\ell_{xy}) = 6$.
   (c) Donner la loi de $\operatorname{rg}(\ell_{X,Y})$.

Exercice 98 – *Centrale 2025 [5/10]*
Soit $n \geq 2$. On note Ω_n l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. On munit Ω_n de la probabilité uniforme. Si $f \in \Omega_n$, on note $X_n(f)$ le nombre d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ n'ayant aucun antécédent par f et, pour i entre 1 et n, on pose $Y_i(f) = 1$ si $f^{-1}(\{i\}) = \emptyset$ et $Y_i(f) = 0$ sinon.

1. Déterminer la probabilité p_n de $S = \{f \in \Omega_n\,,\ f \text{ surjective}\}$. Donner un équivalent de p_n lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer la loi de Y_i, puis celle de Y_iY_j lorsque $i \neq j$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 99 – *IMT 2025 [5/10]*
Est-il possible de truquer deux dés à six faces de sorte que la somme obtenue pour un double lancer suive une loi uniforme ?

Exercice 100 – *IMT 2025 [4/10]*
Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire simultanément n boules et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X. Calculer son espérance.

Exercice 101 – *IMT 2025 [3/10]*
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par $\mathbf{P}(X_k = -k^\lambda) = \mathbf{P}(X_k = k^\lambda) = \dfrac{1}{2}$, où $\lambda \in]0, 1/2[$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}$.

1. Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. Donner un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$, où $\alpha > 0$.
3. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha)$.

Exercice 102 – *IMT 2025 [6/10]*
On note, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = \alpha\lambda^n$ la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants, où $0 < \lambda < 1$ et $(1+\alpha)\lambda < 1$. La probabilité d'avoir un garçon est $q = 1 - p$, où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'avoir une fille.

1. Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
3. Calculer la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins deux garçons, sachant qu'elle en a au moins un.

Exercice 103 – *Navale 2025 [3/10]*
Un concierge possède n clés et souhaite ouvrir une porte. On suppose qu'une seule clé du trousseau permet de l'ouvrir.

1. À chaque essai infructueux, il écarte la clé utilisée. Quel est le nombre moyen de tentatives avant qu'il arrive à ouvrir la porte ?
2. Même question, en supposant qu'à chaque tentative il remet la clé utilisée avec les autres.

Exercice 104 – *Mines 2024 [7/10]*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On définit $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = S_{n-1} + X_n$.

1. Déterminer la loi de $\frac{S_n+n}{2}$. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
2. (a) On pose $A_n = |S_n|$. Déterminer $A_n(\Omega)$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir : $\mathbb{E}(A_{n+1}) = \mathbb{E}(A_n) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(A_{2n}) = \mathbb{E}(A_{2n-1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$

Exercice 105 – *Centrale 2024 [5/10]*
Un robot appuie sur une diode verte ou rouge à tout instant $n \in \mathbb{N}$. Lorsqu'il appuie sur la diode rouge à l'instant n, il appuie sur la diode verte à l'instant $n+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, ou sur la diode rouge avec probabilité $1-p$. Lorsqu'il appuie sur la diode verte à l'instant n, il appuie sur la diode rouge à l'instant $n+1$ avec une probabilité $q \in]0,1[$, ou sur la diode verte avec probabilité $1-q$. On note r_n la probabilité que le robot appuie sur la diode rouge à l'instant n, v_n la probabilité que le robot appuie sur la diode verte à l'instant n.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
2. Trouver une expression simple de A^n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Commenter.

Exercice 106 – *CCINP 2024 [4/10]*

1. La matrice $\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1/2)$. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 107 – *CCINP 2024 [7/10]*
On lance indéfiniment une pièce faisant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « obtenir deux Pile consécutifs pour la première fois au bout du $n^{\text{ème}}$ lancer » et $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4.
2. Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
3. Montrer qu'il est quasi-certain qu'on obtienne deux Pile consécutifs.

Exercice 108 – *CCINP 2024 [7/10]*
Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X_k \sim \mathcal{B}(p_k)$. On suppose : $\dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p \in [0,1]$. Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer l'espérance de $\dfrac{S_n}{n}$.
2. Déterminer la limite éventuelle de $\left(\operatorname{Var}\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)_{n \geqslant 1}$.
3. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4. Montrer :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 109 – *Mines 2024 [8/10]*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$, où p et q sont éléments de $]0,1[$. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.

1. Donner la loi de U.
2. Calculer l'espérance de U.
3. Si $p = q$, montrer que $\mathbb{E}(U) > 1$.

4.3 Mais aussi

Exercice 110 – *Colles 2023/2024 [8/10]*
Une marque de céréales édite, dans les mêmes proportions, 4 autocollants différents. On achète un certain nombre de paquets de céréales, qui contiennent tous un autocollant choisi déposé de façon uniforme dans les paquets commercialisés. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boîtes achetées lorsque la collection est complétée pour la première fois.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathbb{P}(X > n) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
On pourra adapter la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ pour la réunion de trois puis quatre événements.
2. Donner l'espérance de X.

Exercice 111 – *CCP 2016 [7/10]*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité pour qu'aucun des événements $A_n, ..., A_{n+p}$ est inférieure ou égale à $\exp\left(-\sum\limits_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$.
2. On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer qu'il est presque impossible[1] qu'il y ait un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

Exercice 112 – *Mines 2016 [9/10]*
On considère une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre, non nécessairement consécutivement.
2. Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre et consécutivement.
3. Soit X la variable aléatoire indiquant le rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer son espérance.

Exercice 113 – *Points fixes d'une permutation [6/10]*
On munit $\Omega = \mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme (si $A \subset \mathcal{S}_n$, alors $\mathbb{P}(A) = |A|/n!$) et on s'intéresse au nombre moyen $\mathbb{E}(X)$ de points fixes d'une permutation σ :
$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X(\sigma) = \operatorname{Card}\left(\{i \in [\![1, n]\!]\,;\, \sigma(i) = i\}\right).$$
On définit par ailleurs, pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la fonction caractéristique de l'événement « $\sigma(i) = i$ » :
$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad X_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer : $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(\sigma(1) = 1) = \dfrac{1}{n}\cdot$
2. Exprimer X à l'aide des X_i et en déduire l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.

1. Au sens : la probabilité de cet événement est nul.

Exercice 114 – *Centrale 2018 [6/10]*
Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer : $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)} \leqslant \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

4.4 Indications

Exercice 93 – Classique : $Y \underset{X=k}{\sim} \mathcal{B}(k,p)$, et on trouve la loi de Y via la formule des probabilités totales/en conditionnant selon la valeur de X. On trouve : $Y \sim \mathcal{P}(p\lambda)$

Exercice 94 – L'espérance vaut n (développer ce produit scalaire !) donc X ne prend pas que des valeurs strictement plus grandes que n...

Exercice 95 – Pour ce (beau) problème de « premier record » on peut remplacer la loi de Poisson par n'importe quelle loi telle que pour tout $A > 0$, $\mathbb{P}(X > A) > 0$. Bref.

Il est rare d'avoir à montrer que quelque chose « est une variable aléatoire ». On va montrer que déjà, N est défini avec probabilité 1, et ensuite que chaque événement $N = k$ « possède une probabilité », ou encore « est dans la tribu » ; bref : s'exprime à l'aide de réunions/intersections... Tout d'abord, l'événement « X_0 n'est jamais dépassé » est l'événement :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\left((X_0 = n)\bigcap\left(\bigcap_{k\geqslant 1}(X_k \leqslant n)\right)\right)$$

mais à n fixé on montre que $\bigcap\limits_{k\geqslant 1}(X_k \leqslant n)$ est de probabilité nulle par continuité décroissante, donc par continuité croissante la réunion des événements de probabilité nulle est de probabilité nulle. Ensuite

$$(N = t) \qquad = \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty}\left((X_0 = n)\bigcap(X_t > n)\bigcap\left(\bigcap_{k\leqslant t-1}(X_k \leqslant n)\right)\right)$$

et c'est donc bien un événement !
On a ensuite : $\mathbb{P}(N \geqslant n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 \leqslant k)^{n-1}$ et donc (familles sommables) : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant n)$ est de même nature que la double-somme inversée, à savoir $\sum\limits_k \dfrac{\mathbb{P}(X_0 = k)}{1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)}$, et si on a la bonne idée de noter $\alpha_k = \mathbb{P}(X > k)$, alors cette double-somme devient $\sum\limits_h \dfrac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_k}$, série dont le terme générique est minorée (comparaison somme/intégrale, et ouais !) par $\ln(\alpha_{k-1}) - \ln(\alpha_k)$, qui est de série divergente car $\ln(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$!

Exercice 96 – Cours. Ça sent l'inégalité de Markov, non ? Il suffirait de montrer que $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2$! En fait, en regardant la tête d'une somme à la puissance 4, on voit (par indépendance et nullité des espérances de puissances impaires) que

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_i \mathbb{E}(X_i^4) + 6\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) = 3n^2 - 2n$$

et c'est gagné. Ensuite, le complémentaire de $\bigcap\limits_{m=n}^{+\infty}\left(|S_m| < m^{\frac{3}{4}}\ln(m)\right)$ a une probabilité majorée par $\sum\limits_{m\geqslant n} \dfrac{3m^2}{m^3 \ln^4 m}$ qui est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et le théorème de continuité monotone permet de conclure. On a montré qu'avec probabilité 1 il existait un rang au delà duquel $\dfrac{|S_n|}{n^{3/4}\ln n} \leqslant 1$. On montrerait la même chose pour l'événement A_k : « à partir d'un certain rang on a $\dfrac{|S_n|}{n^{3/4}\ln n} \leqslant 1/k$ », pour chaque $k \geqslant 1$. L'intersection (décroissante) des A_k est alors de probabilité 1 et correspond à l'événement : $\dfrac{S_n}{n^{3/4}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 97 – Question de cours : $T \sim \mathcal{P}(2\lambda)$. Ensuite A est diagonalisable si et seulement si $X \neq Y$ ou (union disjointe) $X = Y = 0$. Un simple calcul (à faire !) de $M_{x,y}$ multiplié par une matrice générique nous dit que le rang de $\ell_{x,y}$ vaut 0 si $x = y = 0$, 6 si x et y sont non nuls, et 3 sinon.

Exercice 98 – (C'est le problème de l'ascenseur !) Il s'agit de dénombrer... les bijections ! Puis Stirling. Y_i est une variable de Bernoulli de paramètre p la probabilité pour que tous les $f(j)$ soient différents de i (on peut aussi dénombrer) donc $p = (1 - 1/n)^n$. La variable Y_iY_j est aussi une variable de Bernoulli, cette fois de paramètre $(1-2/n)^n$. Ceci permet de calculer la variance de $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ via les covariances.

Exercice 99 – Assez facile quand on se souvient qu'il suffit de considérer les fonctions génératrices : le produit doit s'annuler en toutes les racines 11-èmes de l'unité (sauf 1) alors que chacune des fonctions génératrices possède au moins deux racines réelles (comptées avec leur multiplicité) car elles sont de la forme $t \mapsto tP(t)$ avec P de degré 5.

Exercice 100 – La première question est un peu teuteu : je dénombre :

$$\forall k \in [\![0, \mathrm{Min}(n, a+b)]\!] \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

Par contre pour l'espérance c'est malin : je considère plutôt, pour $1 \leqslant k \leqslant a$, la variable de Bernoulli X_k égale à 1 si la k-ème blanche (on peut les numéroter) est dans le tirage... de sorte que $X = X_1 + \cdots + X_a$ et il n'y a plus qu'à somme des espérances donc des probabilités. On trouve ainsi : $\mathbb{E}(X) = a\dfrac{\binom{a+b-1}{n-1}}{\binom{a+b}{n}}\cdot$

Exercice 101 – $\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{E}(X_1) = 0$ (linéarité de l'espérance) et (indépendance des X_k) : $\mathrm{Var}(Y_n) = \dfrac{1}{n^2} \times n\mathrm{Var}(X_1) = \dfrac{k^{2\lambda}}{n}\cdot$ Une comparaison somme-intégrale fournira $u_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot$ Bienaymé-Tchebychev fournit ensuite (puisque l'espérance de Y_n est nulle : $0 \leqslant \mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\mathrm{Var}(Y_n)}{\alpha^2} = \dfrac{k^{2\lambda}}{n\alpha^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Je suis peut-être passé à coté de quelque chose : la question 2 ne sert pas...

Exercice 102 – $1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha\lambda^n = 1 - \dfrac{\alpha\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{1-\lambda(1+\alpha)}{1-\lambda}\cdot$
On dérive k fois $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour trouver $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\cdot$ On l'utilise via les probabilités totales : $\mathbb{P}(G = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(E = n)\underbrace{\mathbb{P}(G = k | E = n)}_{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$. Il s'agit enfin de calculer $\dfrac{\mathbb{P}(G=2)}{1-\mathbb{P}(G=0)}\cdot$

Exercice 103 – En conditionnant, on trouve dans le premier cas une loi uniforme, donc d'espérance $\dfrac{1+n}{2}\cdot$ Ça peut surprendre, mais si on imagine un processus on on tire jusqu'au bout les n clés, celle qui nous intéresse, disons la numéro 1 se trouve en position $\sigma(1)$, où σ est une permutation aléatoire...
Dans le deuxième cas, il s'agit d'une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$, donc d'espérance n.

Exercice 104 – On se ramène de façon classique à une binomiale, puis $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $\mathrm{Var}(S_n) = n$. Ensuite $S_n(\Omega) = \{-n, -n+2, ..., n-2, n\}$ (contient 0 si et seulement si n est pair), puis $A_n(\Omega) = \{n, n-2, ...\}$ (entiers positifs majorés par et de même parité que n) : ça termine à 0 si n est pair ; 1 sinon. On a ensuite pour $k > 0$: $\mathbb{P}(A_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = k+1)$... ce qui conduit en sommant les $k\mathbb{P}(A_{n+1} = k)$ à la formule de récurrence sur les espérances... sauf que non si on est honnête : il manque un terme $\frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = 0)$.

En fait la relation vue plus haut n'est valable que pour $k \geqslant 2$, car $\mathbb{P}(A_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(A_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = 2)$: on a retrouvé le terme qui manquait !

Exercice 105 – Probabilités totales en conditionnant sur la diode au temps n : $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique se factorise bien, permettant d'appliquer la technique efficace de la division euclidienne de X^n... Les limites trouvées seront comparées aux résultats au bord (à la physicienne) : lorsque $p = q$, lorsque p est proche de 1 mais pas q...

Exercice 106 – Si $X_2 = X_3$ alors la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. Sinon : si $X_1 = X_4$ alors elle n'est pas diagonalisable (première question), et elle l'est si $X_1 \neq X_4$ (deux valeurs propres distinctes). Bref, elle est diagonalisable sauf si $(X_2, X_3) = (0,1)$ ou $(1,0)$ et $(X_1, X_4) = (0,0)$ ou $(1,1)$. Elle est donc diagonalisable avec probabilité $1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Exercice 107 – Les premières valeurs sont $0, p^2, p^2q, p^2q$ et en conditionnant sur le premier lancer (puis éventuellement le deuxième) : $a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n$. Si on note x_1 et x_2 les deux racines distinctes du polynôme caractéristique, on trouve $a_n = \alpha(x_1^n - x_2^n)$ avec $\alpha = \frac{p^2}{x_1 - x_2}$, puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha\left(\frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2}\right) = \alpha\frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{p^2}{1-q-pq} = \frac{p^2}{p(1-q)} = 1$$

(on a exploité à la fin : $x_1x_2 = -pq$ et $x_1 + x_2 = q$)

Exercice 108 – $\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(p_i - 1) = O(1/n)$ (c'est ce qui sera utile). Ensuite : Markov. Et enfin on choisit N tel qu'au delà de cet entier $\left|\frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} - p\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, de sorte que pour de tels n on a

$$\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

par contraposée et inégalité triangulaire.

Exercice 109 – Lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, l'événement $U = \frac{X}{Y}$ est la réunion disjointe des événements ($X = na$ et $Y = nb$) pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui conduit à la formule modérément sympa :

$$\mathbb{P}\left(U = \frac{a}{b}\right) = \frac{pq(1-p)^a(1-q)^b}{(1-p)(1-q)\left(1-(1-p)^a(1-q)^b\right)}.$$

C'est plutôt moins technique pour la suite puisqu'il est question de l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, et on trouve : $\mathbb{E}(U) = \frac{q}{p} \times \frac{-\ln q}{1-q}$, et pour $p = q$ on pense à l'inégalité de convexité $\ln(1+u) < u$ pour $u \neq 0$ (par **stricte** convexité) qui donne ici $\ln(q) < q - 1$ puis $\frac{\ln q}{q-1} > 1$ (puisque $q - 1 < 0$).

Exercice 110 – Il s'agit de montrer/admettre la « formule du crible » (ici pour 3 événements) :

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \sum_i \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Ensuite on prend E_i l'événement : « la vignette numéro i n'a pas été trouvée dans les n premières boîtes ». On termine avec $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$, pour trouver (il me semble) $\mathbb{E}(X) = 16 - 12 + 16/3$.

Exercice 111 – Voir l'exercice précédent ; on évalue ici l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geqslant n}\overline{A_k}$.

Exercice 112 – C'est du dénombrement. Il y a déjà $(2n)!$ tirages possibles. Pour la première expérience, on dénombre les succès en choisissant les n positions des impairs ($\binom{2n}{n}$ possibilités ; la position de chaque impaire est alors imposée) puis on distribue les paires dans les n cases qui restent : $n!$ possibilités : $p_1 = \dfrac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!}\cdot$ Pour la deuxième question, on choisit la position $p \in [\![1, n+1]\!]$ de la première boule impaire, ce qui impose la position de toutes les autres. Il reste à positionner les n numéros paires dans les n cases qui restent : $p_2 = \dfrac{(n+1)n!}{(2n)!}\cdot$
La dernière question est difficile. Déjà, je préfère évaluer Y la position de la première boule impaire (et la loi de X est bien entendu celle de $2n+1-Y$; si vous ne comprenez pas pourquoi ou que vous trouvez ça limite-limite, vous pouvez raisonner directement sur X). Or donc, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ on peut évaluer $\mathbb{P}(Y=k)$ soit par dénombrement soit par probabilité composées. Je trouve $\mathbb{P}(Y=k) = n\dfrac{n!(2n-k)!}{(2n)!(n-k+1)!}\cdot$ Il s'agit ensuite de calculer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1}(2n+1-k)\mathbb{P}(Y=k) = n\frac{n!^2}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+1-k}{n}$$

Sans Python (et le module `fractions`) j'aurais laissé tombé, mais le résultat semblait simple : $\dfrac{n(2n+1)}{n+1}\cdot$
C'est alors que j'ai pensé à une relation qu'il est inenvisageable qu'un taupin λ connaisse : $\sum\limits_{i=r}^{s}\binom{i}{r} = \binom{s+1}{r+1}$ (dessiner le triangle de Pascal et plisser les yeux vous permettra de voir que c'est en fait facile par récurrence sur s)... et cette relation permet effectivement de trouver ce résultat.
Notons enfin qu'il est normal que l'espérance de Y (qui vaut $2n+1-\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{n+1}$) soit strictement plus petite que 2 : on pourra penser à une expérience ou on remettrait les boules déjà tirées dans l'urne ; le temps d'attente de la première impaire suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, donc d'espérance 2. Or dans l'expérience de l'exercice, on ne remet pas les boules, donc la première impaire arrivera plus vite.

Exercice 113 – Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(\sigma(i)=i) = \dfrac{1}{n}$ (dénombrement), or $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, donc, même si ces variables ne sont pas indépendantes, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{n}{n} = 1$.

Exercice 114 – La variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est bornée donc possède une espérance ! L'inégalité proposée reste vraie assez généralement via Cauchy-Schwarz, mais dans le cas présent on peut calculer : $\mathbb{E}(1/X) = -\dfrac{p}{q}\ln(1-q)$, et on sait que $\ln(1-q) \leqslant -q\dots$

Chapitre 5

Interlude : diverses choses

5.1 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 115 – *Mines 2025 [5/10]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B, C trois points du plans complexe d'affixes a, b et c. On suppose que le triangle ABC n'est pas aplati et que $a, b, c \in \mathbb{U}_n$ (les racines n-èmes de l'unité).

1. Combien y a-t-il de tels triangles ?
2. Combien d'entre eux sont rectangles ?

Exercice 116 – *Mines 2025 [2/10]*
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tels que $a + b + c = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Montrer que $\sin(a)\sin(b)\sin(c) \leqslant \frac{1}{8}$.

Exercice 117 – *CCINP 2025 [2/10]*

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$.

Exercice 118 – *IMT 2025 [7/10]*
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$.

1. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est continue en $a \in E$,
   (b) pour toute suite (x_n) telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

2. On suppose ici que $E = F = \mathbb{R}$ et que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. On suppose de plus que $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
   (a) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 119 – *Mines 2024 [6/10]*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f.

5.2 Mais aussi

Exercice 120 – *Mines 2017 [6/10]*
Soit $p \in]0,1[$. Montrer :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |y^p - x^p| \leqslant |y - x|^p$$

Exercice 121 – *X PC 2021 [8/10]*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier $(S_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.
2. Dans le cas général, donner une condition nécessaire et suffisante simple sur f pour que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 122 – *Mines 2016 [2/10]*

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$.
2. En déduire : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^t < \mathrm{e}^x < \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Exercice 123 – *[1/10]*
Résoudre l'équation $3^x + 4^x = 5^x$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 124 – *Mines 2018 [4/10]*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les racines multiples de P' sont aussi racines multiples de P.
3. Déterminer le signe de $PP'' - P'^2$.

Exercice 125 – *Mines PC 2022 [5/10]*
Dénombrer les fonctions $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

5.3 Indications

Exercice 115 – On choisit A (n possibilités) puis B différent ($n-1$ choix) puis C ($n-2$ choix). Si on considère que $ABC = ACB = \ldots$, chaque triangle sera compté 6 fois : il y a donc $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triangles.
Nos grands parents savaient que si on prend deux points A, B diamétralement opposés sur un cercle et un troisième point C sur ce cercle, alors ABC est rectangle. Et en fait c'est la seule possibilité pour qu'un triangle inscrit sur un cercle soit rectangle. Si n est impair on ne trouvera pas de racines n-èmes diamétralement opposées (car vous les visualisez, n'est-ce pas ?). Si n est pair, on choisit une des $n/2$ diagonales, puis l'un des $n-2$ points qui restent, ce qui nous donne $n(n-2)/2$ triangles rectangles.

Exercice 116 – Je passerais bien au logarithme... avant de renifler quelque chose qui ressemblerait à une inégalité de convexité... genre pour $x \mapsto \ln(\sin(x))$ sur $]0, \pi/2[$...

Exercice 117 – Exo sans préparation de fin de planche... $\dfrac{1}{\sqrt{x_i}} \times \sqrt{x_i} = 1$...

Exercice 118 – C'est essentiellement la même chose sur $\mathbb{R}$ ou sur un espace vectoriel normé. C'est de l'ε de base. Pour le sens indirect, raisonner par l'absurde : il existe ε tel que pour tout $\alpha > 0$ on peut trouver x tel que $\|a - x\| \leqslant \alpha$ et $\|f(a) - f(x)\| > \varepsilon$, et en particulier pour $\alpha = 1/n$... Pour le deuxième point, approcher x et y tels que $x < y$ par des suites de rationnels (pour la croissance), et finasser avec $x < z_1 < z_2 < y$ où $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}$ pour la stricte croissance.

Exercice 119 – Supposons qu'il y en ait un nombre fini, et que X soit le dernier. La fonction f est continue sur le segment $[0, X]$ donc possède un minimum m et un maximum M. Il existe alors a et b tels que $f(a) = m - 1$ et $f(b) = M + 1$, avec fatalement m et M strictement plus grands que X. Un petit coup de TVI, après avoir noté que $f(a) < y < f(b)$, nous fournira une contradiction.

Exercice 120 – Il s'agit de montrer que pour tout $\lambda > 1$, $\lambda^p - 1 \leqslant (\lambda - 1)^p$, ou encore : pour tout $\mu \geqslant 0$, $(1 + \mu)^p \leqslant 1 + \mu^p$. Ce dernier point de vue est « le » bon : une simple étude de la fonction différence fera l'affaire.

Exercice 121 – Dans le cas particulier on a $f(t) \sim t$ donc on peut être tenté de remplacer $f(k/n^2)$ par k/n^2, et on trouve alors : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$. Pour prouver ce résultat, on peut par préciser l'équivalent vu plus haut en disant que d'une part $f(t) \leqslant t$, et d'autre part $t \in [0, 1/n]$ $\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant S_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ on obtient par gendarmisation : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1/2$.
Dans le cas général, on obtient assez naturellement la condition nécessaire de convergence $f(0) = 0$ (à prouver soigneusement tout de même). Elle est également suffisante, et on peut le montrer en contrôlant $\dfrac{f(t)}{t}$ par la dérivée de f sur $[0, t]$. Plus précisément si on note respectivement m_t et M_t le minimum et le maximum de f' sur $[0, t]$ alors le théorème des accroissements finis nous assure que pour tout $x \in [0, t]$, $xm_t \leqslant f(x) \leqslant xM_t$. On a alors $m_{1/n}\frac{n+1}{2n} \leqslant S_n \leqslant M_{1/n}\frac{n+1}{2n}$ et il reste à conclure soigneusement !

Exercice 122 – De simples études de fonctions (attention quand même à la STRICTE monotonie pour établir des inégalités strictes) montrent que pour $u > 0$, $\ln(1 + u) < u$ (puis on l'applique à $u = 1/t$) et : $(t + 1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) > 1$. On applique ceci à $t = y/x$, puis on utilise la stricte croissance de $u \mapsto u^x$ sur $[1, +\infty[$ quand $x > 0$.

Exercice 123 – Beuhhhh... on a découvert en classe de quatrième que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Et on l'a redécouvert tous les ans depuis. Bref, on dispose d'une première solution. Ensuite, l'application $x \mapsto \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ me semble strictement décroissante donc injective...

Exercice 124 – Utiliser d'une part Rolle et d'autre part la caractérisation de la multiplicité des racines (ou la retrouver). Ensuite, $PP'' - P'$ est du signe de la dérivée (entre deux racines de P) de $\dfrac{P'}{P}(x) = (\ln|P|)'(x) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{m_i}{x - x_i} \cdots$

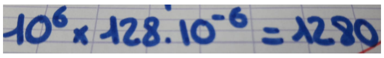
Exercice 125 – Tous les habitants de « l'image » $f([\![1, n]\!])$ sont envoyés sur eux-mêmes. On peut choisir d'abord $k \in [\![1, n]\!]$ le cardinal de l'image, puis l'image. Il reste alors à envoyer comme on veut les $n - k$ autres éléments de $[\![1, n]\!]$ individuellement sur les habitants de l'image, soit un nombre total de :

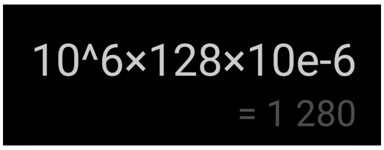
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$$

Bonus : dénombrer les f telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$!

Chapitre 6

Suites et séries de fonctions – séries entières





6.1 Rappels de cours

— Différents modes de convergence des suites et séries de fonctions. [DÉFINITIONS]
— La convergence normale implique la convergence uniforme.
— Théorèmes de régularité pour les limites de suites de fonctions (resp. sommes de séries de fonctions).
— Savoir appliquer tout cela à $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
Non mais vraiment ! Vérifiez que vous savez effectivement faire.
— Rayon de convergence. [DÉFINITION] Savoir les calculer en pratique (et pas forcément via d'Alembert !)
— Pour quels $r \geqslant 0$ la suite $\left(\frac{n^2}{3^n} r^n\right)$ est-elle bornée ?
— Convergence absolue dans le disque ouvert ; normale sur $[-A, A]$ si $A < R$. [PREUVE]
— Régularité des sommes de séries entières.
— Développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$. [PREUVE]
— Rayon de convergence de la série entière dérivée (resp. primitivée).

6.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 126 – *Mines 2025 [5/10]*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Trouver un équivalent de S en 0^+.
   On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
5. Trouver la limite de S en $+\infty$.
6. La série de fonctions converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 127 – *Mines 2025 [4/10]*

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$.
2. Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

Exercice 128 – *Mines 2025 [8/10]*
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \in [0,1] \mapsto a_n x^n (1-x)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement.
2. Montrer que la convergence est normale si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 129 – *Centrale 2025 [6/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f_n : x \in [0,+\infty[\mapsto \dfrac{(-1)^n n}{n^2+x}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$. Montrer que sa somme S est continue.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 130 – *Centrale 2025 [8/10]*
Exercice de cours (nombres de Catalan)... qui nécessite beaucoup de soin pour être rigoureux, et c'est une bonne nouvelle : vous serez fortement récompensés !

1. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.
   Montrer que $\sum a_n$ converge.
   Ind. Montrer que, pour tout $\beta \in]1,\alpha[$, la suite $(n^\beta a_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$. Montrer qu'il y a convergence en $x = \pm 1$.
3. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
   On pose $S : x \in]-R,R[\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Déterminer S et en déduire une expression de u_n.

Exercice 131 – *CCINP 2025 [4/10]*
Soit $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?
2. Soit $a \in]0,1/2[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 1-a]$.

Exercice 132 – *IMT 2025 [4/10]*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et donner une expression de $f(x)$.

Exercice 133 – *ENSEA 2025 [5/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de (f_n').

Exercice 134 – *CCINP [6/10]*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On note R' le rayon de la série entière $\sum b_n z^n$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$..

1. Montrer que $R' \geqslant \mathrm{Max}(1, R)$.
2. Si $R' > 1$, montrer que $R' = R$.
3. Montrer que $R' = \mathrm{Max}(1, R)$.

Exercice 135 – *CCINP 2025 [6/10]*
$a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$.

1. Montrer que (a_n) est strictement positive.
2. Étudier sa monotonie.
3. Montrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ diverge. Quelle est la limite de (a_n) ?
4. Quel est le rayon de convergence de la série entière $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?
5. Montrer que S est solution de $(x-1)y' + (x+1)y = 0$. En déduire S.
6. Montrer que $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}(n-k+1)$.
7. Déterminer un équivalent de a_n en $+\infty$.

Exercice 136 – *Mines 2024 [4/10]*
Soient $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ et $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
2. Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut F' ?
3. Montrer que F est développable en série entière et déterminer ce développement.

Exercice 137 – *Centrale 2024 [7/10]*
Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{1+\sin(2\pi n x)}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$?

   Soient $\varepsilon > 0$ fixé, $A_n = f_n^{-1}\big([\varepsilon, +\infty[\big)$ et $u_n = \mathbf{1}_{A_n}$.
2. Tracer le graphe de f_5 et en déduire que u_5 puis u_n est continue par morceaux.
3. Montrer que la suite (u_n) converge simplement et donner sa limite.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} u_n = 0$.

Exercice 138 – *CCINP 2024 [5/10]*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S en fonction de a.
   On suppose pour toute la suite que $|a| < 1$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ pour $x > 0$.
4. Trouver un équivalent de S en 0.
5. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
6. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 139 – *Colles 2023-2024 [8/10]*
On considère quand c'est défini :

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}.$$

1. Donner le domaine de définition de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence normale sur ce domaine.
3. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

Exercice 140 – *Colles 2023-2024 [4/10]*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$.
Bonus : étudier la somme aux bords de l'intervalle...

Exercice 141 – *Colles 2023-2024 [7/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On définit $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Expliciter une relation entre A^3, A^2, A et I_n.
2. Donner un encadrement des valeurs propres de A.
3. Expliciter une relation entre t_n, t_{n-1}, t_{n-2} et t_{n-3}.
4. Donner le rayon de convergence de $\sum t_n z^n$ et expliciter la somme.

Exercice 142 – *Colles 2023-2024 [5/10]*
Calculer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k(k+1)}.$$

Exercice 143 – *CCP 2018 [3/10]*
On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f_n : x \in [-1,1] \mapsto \sin\left(nx\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$.

1. Montrer la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers F qu'on explicitera.
2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer la convergence uniforme sur $[a,1]$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $[-1,1]$?

Exercice 144 – *Mines 2016 [7/10]*
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Soient $x \in]-1,1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Simplifier $\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^n})$.
3. Expliciter f.

Exercice 145 – *CCP 2016 [2/10]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{(-1)^n}$.

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
2. Exprimer la somme de cette série entière sur son intervalle de définition à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 146 – *Mines 2018 [5/10]*
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Exercice 147 – *Mines 2018 [8/10]*
On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence strictement positif, de somme notée $f(z)$. On suppose qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes non nuls convergeant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Exercice 148 – *Mines 2018 [5/10]*
Soit $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^2} dt$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ puis étudier la convergence aux bornes du domaine.

6.3 Indications

Exercice 126 – On remarque la parité de u_n. Ensuite, $\|u_n\|_\infty = u_n(n) = \frac{1}{2n}$: pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$, mais convergence normale sur chaque $[0, A]$. La convergence normale de $\sum u_n'$ sur chaque $[0, A]$ s'obtient facilement par simple majoration de $\|u_n'\|_{\infty,[0,A]}$. Le théorème de la double-limite s'applique à $\frac{S(x)}{x}$ en 0^+ pour fournir : $S(x) \sim \frac{\pi^2}{6}x$. Ensuite, une comparaison somme-intégrale demandant un peu de soin (croissance jusqu'à n puis décroissance) nous donne : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, ce qui montre qu'on ne peut appliquer le théorème de la double-limite en $+\infty$: il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 127 – Si $r > 0$, on a $a_n r^n \sim n^2(r/2)^n$ qui est bornée si et seulement si $r/2 \leqslant 1$, et le rayon de convergence vaut donc 2. Les d'Alembertiens auront trouvé la même conclusion. On a ensuite très envie de faire intervenir $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, dont le rayon de convergence vaut 1, et dont la dérivée seconde sur $]-1,1[$ vaut d'une part $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)x^k$, et d'autre part $\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$, et la somme recherchée vaut $g''(1/2) = 16$.

Exercice 128 – Le maximum de u_n est pris en $1 - 1/n$ et sa valeur est équivalente à $\frac{a_n}{ne}$.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut majorer $R_n(x)$ (qui est positif) par $a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k(1-x) = a_n x^{n+1} \leqslant a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour la réciproque, raisonnons par la contraposée : si (a_n) ne converge pas vers 0, alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$ et est en particulier minorée par cette valeur (a_n est décroissante), ce qui conduit à

$$\|R_n\|_\infty \geqslant R_n(1-1/n) \geqslant \ell\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\ell > 0$$

Exercice 129 – À x fixé, dès que $n(n+1) \geqslant x$ on a $(|f_n(x)|)$ décroissante... Ceci nous montre non seulement la convergence simple, mais la convergence uniforme sur chaque segment $[0, A]$, d'où la continuité sur $\mathbb{R}^+$.
Pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, il n'y a hélas pas convergence normale puisque $\|f_n\|_\infty = |f_n(0)| = \dfrac{1}{n}$ et la majoration du reste à l'aide du premier terme n'est pas possible car la décroissance de $(|f_n(x)|)_n$ n'est pas vraie à partir d'un rang N fixe valable pour tout x, donc j'ai regroupé les termes par deux en écrivant $R_{2n-1}(x) = \sum\limits_{p=n}^{+\infty} g_p(x)$ avec

$$0 \leqslant g_p(x) = f_{2p}(x) + f_{2p+1}(x) = \frac{4p^2+2p+x}{(4p^2+x)((2p+1)^2+x)} \leqslant \frac{4p^2+2p+x}{4p^2(4p^2+4p+1+x)} \leqslant \frac{1}{4p^2},$$

nous donnant une convergence normale donc uniforme de $\sum g_n$, d'où la convergence uniforme de (R_{2n-1}) vers 0 : je vous laisse terminer !

Exercice 130 – Voir le cours... $\sqrt{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}x^n = 1 - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}x^n$.
Si on fait l'hypothèse d'un rayon de convergence $R > 0$ alors $xS(x)^2 - S(x) + 1 = 0$ pour tout x, puis $S(x) = \dfrac{1+\varepsilon_x\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour $x \neq 0$, puis (continuité de $x \mapsto \varepsilon_x$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et continuité de S en 0) : $\varepsilon_x = -1$ pour tout x.
C'est là que commence la vraie difficulté ! On définit $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \in]-1/4, 1/4[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, on montre que $\varphi(x)$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ avec $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}x^n$. Par ailleurs, la relation $x\varphi(x)^2 - \varphi(x) + 1 = 0$ nous assure que les coefficients de ce DSE vérifient la même relation de récurrence (et la même condition initiale) que les u_n ; ils sont donc égaux.

Exercice 131 – Il s'agit essentiellement d'étudier les suites définies par leur premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
On commence par étudier f et représenter son graphe. Le petit dessin usuel avec u_0 et les premiers termes de la suite nous convainc que (sauf pour $u_0 = 0$), la suite (u_n) converge vers $1/2$. On peut prouver tout cela en commençant par constater que $u_1 \in [0, 1/2]$, intervalle qui est stable par f donc contient tous les u_n pour $n \geqslant 1$. Sur cet intervalle on a $f(x) \geqslant x$ donc $f(u_n) \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante, majorée par $1/2$ donc converge vers $\ell \in [0, 1/2]$ point fixe de f (continuité), donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1/2$. Si on suppose $u_0 > 0$ alors tous les u_n sont $\geqslant u_0$ donc $\ell \geqslant u_0 > 0$ donc $\ell = 1/2$.
Bref, (f_n) converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La convergence de cette suite de fonctions continues vers une fonction discontinue ne peut être uniforme sur $[0, 1]$. Cependant, si on fixe $a \in]0, 1/2[$ et $x \in [a, 1-a]$ alors $f(a) \leqslant f(x) \leqslant 1/2$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(a) \leqslant f_n(x) \leqslant 1/2$, donc $\|f_n - g\|_{\infty,[a,1-a]} \leqslant |f_n(a) - 1/2| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 132 – $H_n \sim \ln(n)$ donc $RCV = 1$, puis on voit un produit de Cauchy (bien définir les deux suites/séries en jeu) : $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot$

Exercice 133 – Convergence simple vers 0. Ensuite, $\|f_n\|_\infty = f_n(\sqrt[3]{2}/n) = 2^{2/3}/3$ donc il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$ (mais certainement sur $[a, 1]$ pour tout $a \in]0, 1[$). On a ensuite (f_n') qui converge simplement vers la fonction nulle, mais l'étude précédente nous invitait à regarder du coté de $f_n'(1/n)$ (par exemple), qui vaut $\dfrac{n}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 134 – On a $|b_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $R' \geqslant 1$, mais aussi $|b_n| \leqslant |a_n|$ donc $R' \geqslant R$.
Si $R' > 1$: on a alors $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (convergence de $\sum b_n z^n$ sur le disque ouvert de convergence), or $a_n = b_n + b_n\,|a_n|$ donc $b_n = a_n - \underbrace{b_n\,|a_n|}_{=o(a_n)} \sim a_n$ donc $R' = R$.

Enfin :

— si $R > 1$ alors $R' > 1$ donc $R' = R = \mathrm{Max}(1, R)$;

— si $R \leqslant 1$: $|b_n| \geqslant \begin{cases} \dfrac{|a_n|}{2} & \text{si } |a_n| \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $(b_n r^n)$ n'est pas bornée si $r > 1$, donc $R' \leqslant 1$ donc $R' = 1 = \mathrm{Max}(1, R)$.

Exercice 135 – Les a_n sont positifs (récurrence double) puis (a_n) est croissante. On a alors $a_{n+1} - a_n \geqslant \dfrac{a_0}{n+1}$ donc $\sum(a_{n+1} - a_n)$ diverge, et plus précisément les sommes partielles tendent vers $+\infty$, donc il en va de même de la suite (a_n). Puisque $(a_n 1^n)$ n'est pas bornée on a $R \leqslant 1$, mais on a aussi $a \leqslant 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (récurrence immédiate) donc $R \geqslant 1$.
Oui, on pouvait aussi considérer $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{a_{n-1}/a_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
L'équation différentielle s'obtient en multipliant la relation de récurrence par $(n+2)x^{n+1}$... et en sommant avec un peu de soin (tous les calculs formels étant justifiés par les propriétés des sommes de série entière sur l'intervalle ouvert de convergence). On en déduit : $y(x) = \mathrm{e}^{-t}\dfrac{1}{(1-t)^{-2}}$ et il reste à faire un produit de Cauchy entre une série exponentielle et une série dérivée. L'identification s'obtenant en invoquant l'unicité du développement en série entière. Pour l'équivalent, on isole le gros terme qui est équivalent à $n\mathrm{e}^{-1}$ et les autres qui sont bornés.

Exercice 136 – $xf(x) = \mathrm{e}^x - 1$ sur $\mathbb{R}$. On peut ensuite intégrer terme à terme un développement en série entière, le rayon étant infini (produit de Cauchy). Ce développement dont l'existence est prouvée via un produit de Cauchy... se calcule plutôt en dérivant :

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!} x^n\right)'$$

Exercice 137 – (f_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$, la convergence étant non uniforme (sans quoi la limite serait continue). f_5 oscille entre 0 et le double d'un machin qui décroît vers 0, et u_n nous montre les réels envoyés au dessus de ε par f_n : c'est une réunion finie de segments, et u_n est donc une brave fonction en escaliers donc continue par morceaux. On a même $u_n(x) = 0$ dès que $\dfrac{2}{1+nx^2} < \varepsilon$ c'est-à-dire $x^2 > \dfrac{1}{n}(2/\varepsilon - 1)$, ce qui donne la convergence simple vers 0 (fixer x_0 : il existe n tel que...). Il y a enfin convergence dominée vers $\mathbf{1}_{\{0\}}$: on peut dominer par $\mathbf{1}_{[0,1]}$ pour peu que n soit assez grand (disons : plus grand que $2/\varepsilon - 1$).

Exercice 138 – Dans les cas où $|a| > 1$ ou $a = 1$, le domaine de définition est vide. Sinon c'est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (série alternée, ou convergence absolue dans le cas $|a| < 1$). Ensuite, convergence normale sur $[\varepsilon, +\infty[$. La relation $S(x+1) = \dfrac{S(x)}{a} - \dfrac{1}{x}$, une fois retournée, donne $S(x) = aS(x+1) + \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ en 0^+ puisque S est continue en 1. Par double-limite (convergence uniforme sur $[1, +\infty[$), $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, on peut également double-limiter sur $xS(x)$ pour trouver finalement : $S(x) \sim \dfrac{1}{1-a}\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 139 – Je trouve $\|f_n\|_\infty = f_n(1/n) = \dfrac{1}{n\ln(n)\mathrm{e}}$, donc il n'y a pas convergence normale. Cependant, la majoration

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln k} \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

permet d'obtenir : $\|R_n\|_\infty = O(1/\ln(n))$.

Exercice 140 – Il est intéressant de bien distinguer les cas $\alpha > 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ puis $\alpha \in]0,1[$. Et enfin $\alpha < 0$ par comparaison somme-intégrale. On trouve toujours $R = 1$.

Exercice 141 – Cayley et Hamilton doivent aider. Il me semble que le polynôme caractéristique s'étudie facilement (au sens : étude de fonction), fournissant trois valeurs propres vérifiant $-2 < \lambda_1 < -1$, et $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3 < 2$ (on doit pouvoir trouver sans calculatrice qui de $|\lambda_1|$ et λ_3 est le plus grand...). La trace appliquée à la relation polynômiale donne une relation de récurrence d'ordre 3 pour (t_n) ; une fois multipliée par t^n puis sommée, ma foi... Comme d'habitude, on obtient une minoration du rayon de convergence plus facilement que sa valeur exacte.

Exercice 142 – Pour calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ (et trouver $x - (x-1)\ln(1-x)$) je dériverais volontiers une ou deux fois, selon qu'on reconnaît ou pas le développement en série entière de $\ln(1-x)$... La somme recherchée vaut finalement $1 - \ln(2)$.

Exercice 143 – $f_n(1/n) = ?$ Pour $x \in [a,1]$, on a $0 \leqslant nx\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant n\mathrm{e}^{-na^2}$...

Exercice 144 – Il y a divergence grossière pour $|x| \geqslant 1$, et $f_n(x) = o(1/2^n)$ sinon. Ensuite, le calcul pour $N = 2$ voire $N = 3$ risque de donner une idée du résultat, et enfin les sommes partielles ressemblent à des dérivées de logarithmes de produits partiels, non ? Finalement, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$

Exercice 145 – $r^n/2 \leqslant a_n r^n \leqslant 2r^n$, donc $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$, ce qui donne le rayon. Il y a par ailleurs divergence en ± 1. Enfin, en cassant la somme $S(x)$ en deux : $S(x) = \dfrac{2 + x/2}{1-x^2}\cdot$
On peut facilement vérifier la vraisemblance avec un DL à l'ordre 3 : plus un ou deux points à la note !

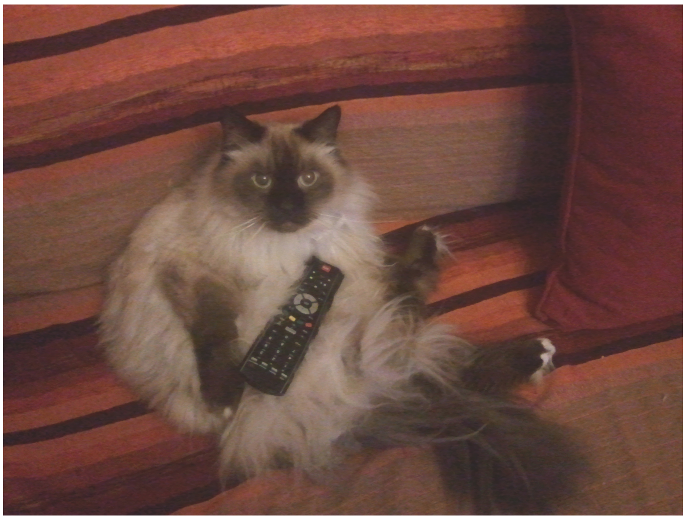
Exercice 146 – La convergence de $\sum f_n$ (ainsi que $\sum f_n'$) est normale donc uniforme sur $[-A, A]$ dès que $0 < A < 1$ (attention à bien MINORER $1 - x^n$...).

Exercice 147 – (« principe des zéros isolés ») Raisonnons par l'absurde et supposons que k_0 est le plus petit indice tel que $a_{k_0} \neq 0$. On a alors (majorer le module de la somme dont on a extrait le premier terme...) $f(z) = a_{k_0} z^{k_0} + o(|z|^{k_0})$. Considérons alors $f(z_n)$...

Exercice 148 – Avec $\dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{th}(t) \leqslant 1$ pour t assez grand on traite le début ($R = 1$, et il y a divergence en 1) et pour aller plus loin, on peut noter que $0 \leqslant 1 - a_n \leqslant \mathrm{e}^{-2n}$ donc $a_n(-1)^n = \dfrac{(-1)^n}{n} + o(1/n^2)$.

Chapitre 7

Intégration



7.1 Rappels de cours

— Formule de Taylor avec reste intégral. [PREUVE]
— Intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ et en 0^+. [PREUVE]
— Comment montrer qu'une fonction est intégrable ? Et d'intégrale convergente ?
— Théorème de convergence dominée.
— Intégrale de la somme d'une série de fonctions.
— Régularité des intégrales à paramètres (continuité, classe $\mathcal{C}^1$).
— Savoir montrer que Γ est $\mathcal{C}^0$... et même un peu plus sur $]0, +\infty[$. Attention : il faut d'une part localiser sur $[A, B] \subset]0, +\infty[$ et d'autre part faire attention à distinguer $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ au moment de la domination.

7.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 149 – *Mines 2025 [9/10]*
On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

1. Trouver un équivalent de F en $+\infty$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \displaystyle\int_{a_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$. Trouver un équivalent de a_n.

Exercice 150 – *Mines 2025 [7/10]*

1. Soient a et b strictement positifs. Montrer :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+3n}$.

Exercice 151 – *Mines 2025 [3/10]*

Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 152 – *Mines 2025 [1/10]*

Montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

Exercice 153 – *Centrale 2025 [8/10]*

Soient $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$.

1. Expliciter $(P(X))^2$ et en déduire que $\sum\limits_{0\leqslant p,q\leqslant m} \dfrac{a_pa_q}{p+q+1} \geqslant 0$.
2. Exprimer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{it})|^2 dt$ en fonction de a_k.
3. Si $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)dx = -i \int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{it}\,dt$.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant m} \frac{a_pa_q}{p+q+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{m} a_k^2$.

Ne vous inquiétez pas si vous trouvez 2π plutôt que π : Hilbert lui-même avait obtenu ce coefficient non optimal dans un premier temps !

Exercice 154 – *Centrale 2025 [6/10]*

Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\mathrm{e}^{-x^2}dx$ converge.

1. (a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Soit $\Phi : (f,g) \in E\times E \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx$. Montrer que Φ est bien définie et définit un produit scalaire sur E.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}dx$. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.
3. On pose $F : z \in \mathbb{C} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{zx-x^2}dx$. Montrer que F est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son développement.

Exercice 155 – *Centrale 2025 [6/10]*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto (1-x/n)^n \ln(x)\,\mathbf{1}_{]0,n[}(x)$.
   Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)dx$.

3. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)dx$ en fonction de γ.

Exercice 156 – *Centrale 2025 [6/10]*

On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

Soit $K : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $U : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)f(y)dy$.

1. Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.

Exercice 157 – *IMT 2025 [5/10]*

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}} - 1\right)dx$.

Exercice 158 – *ENSEA 2025 [3/10]*

Étudier, en fonction des paramètres réels α et β, l'intégrabilité sur $[2,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha \ln(x)}$.

Exercice 159 – *CCINP 2025 [4/10]*

1. Établir pour $n \in \mathbb{N}$ l'existence de $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$.
2. Déterminer la nature des séries $\sum I_n$ et $\sum nI_n$.

Exercice 160 – *CCINP 2025 [3/10]*

Soit $f : x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)dt$.

1. Justifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.
3. Que peut-on dire de f' en 0 ?

Exercice 161 – *CCINP 2025 [6/10]*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}dx$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{5/3}}J_n$, où $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(n^{-1/3}t)}{1+t^3}dt$.
3. Montrer que la suite (J_n) admet pour limite $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$. En déduire la limite de la suite (I_n).
4. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.
5. Montrer que $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
6. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 162 – *Navale 2025 [3/10]*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$. Montrer que I_n est défini pour tout n et déterminer la limite de (I_n).

Exercice 163 – *IMT 2025 [2/10]*
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x\sin(t))dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la limite de $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 164 – *CCINP 2025 [5/10]*
Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(t))dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$.
3. Montrer que g est dérivable et calculer g'.
4. Nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{g(n)}$?

Exercice 165 – *CCINP 2025 [3/10]*
Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{3a} \frac{\cos(u)}{u} du = \ln(3)$.

Exercice 166 – *Mines PC 2024 [5/10]*
Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin} t} dt$ quand x tend vers 0.

Exercice 167 – *Mines 2024 [4/10]*
Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lfloor x \rfloor \mathrm{e}^{-x} dx$.

Exercice 168 – *Mines 2024 [3/10]*
Soient $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} dx$ et $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que I est bien définie.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 169 – *Mines 2024 [4/10]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}\cdot$ À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 170 – *Mines 2024 [4/10]*

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}\cdot$
2. Montrer que pour tout $x \in [0, R[$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2} = x \int_0^1 \frac{\ln(t)}{xt-1} dt$.
3. Que se passe-t-il pour $x = 1$?

Exercice 171 – *Mines 2024 [5/10]*
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$. Déterminer la limite puis un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 172 – *CCINP 2024 [5/10]*
On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto f_n(x) = \dfrac{1}{x}\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - 1\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Citer le théorème de convergence dominée.
2. Justifier la définition de I_n.
3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

Exercice 173 – *Colles 2023-2024 [7/10]*

1. Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 174 – *Colles 2023-2024 [2/10]*
Calculer
$$\int_{3/2}^{5/2} \sqrt{-3+4x-x^2}dx.$$

Exercice 175 – *Colles 2023/2024 [6/10]*
Donner la limite de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{\mathrm{ch}(t)-1} dt$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 176 – *CCP 2018 [4/10]*
On définit, pour $n > 0$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Montrer rapidement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.
2. Prouver l'existence de I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Trouver un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 177 – *TPE 2018 [6/10]*
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixt}-1}{t} \mathrm{e}^{-t} dt$.

1. Montrer que I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $I'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire une expression simple de $I(x)$.

Indication : on pourra établir l'inégalité $\left|\mathrm{e}^{iu}-1\right| \leqslant |u|$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

Exercice 178 – *Mines 2016 [6/10]*

1. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)} dt$ où x est un réel. Trouver l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa dérivabilité et déterminer une expression simple de f.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Existence éventuelle et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln(t)} dt$.

Exercice 179 – *CCP 2016 [3/10]*

Existence et valeur de $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}(x)+x^n\mathrm{e}^{-x}}dx$.

Exercice 180 – *IMT 2017 [4/10]*

On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{ch}(tx)dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Donner une équation différentielle vérifier par f, puis en déduire la valeur de f.
   On donne : $f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 181 – *Centrale 2017 [8/10]*

On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Montrer : $I_n\sim n\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du$.

Exercice 182 – *CCP 2018 [1/10]*

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{dt}{\ln(\ln t)}$.

Exercice 183 – *CCP 2018 [3/10]*

1. Justifier l'existence de $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}dt$.
2. Sachant que $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer : $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 184 – *Mines 2018 [5/10]*

Soit $f : x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que le prolongement continu de f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas $\mathbb{R}^+$.

Exercice 185 – *Mines 2018 [8/10]*

On pose, pour $x>0$: $f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

7.3 Indications

Exercice 149 – Le premier point est classique et doit être fait les yeux fermés si on est admissible aux mines : intégration par partie (dans le bon sens !), et constat que le terme tout intégré est négligeable devant... le membre de gauche ! Bref : $F(x)\sim\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

En première approximation, (a_n) est croissante, et une limite finie devrait vérifier $\ell = \ell + \displaystyle\int_\ell^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$, ce qui est impossible, donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
La suite est beaucoup plus délicate. Tout d'abord, voici ce que fait un professionnel (taupin aguerri ou prof) : $a_{n+1}-a_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-a_n^2}}{2a_n}$ est transformé en $y' \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2}}{2y}$ puis $\left(\mathrm{e}^{y^2}\right)' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puis $\mathrm{e}^{y^2} \sim t$ puis $y(t) \sim \sqrt{\ln(n)}$, donc on sait qu'on va vouloir montrer : $a_n \sim \sqrt{\ln(n)}$.
Pour revenir au discret, la limite $\left(\mathrm{e}^{y^2}\right)' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ nous invite à considérer $b_n = \exp(a_n^2)$ puis $b_{n+1} - b_n$ qui a le bon goût de tendre vers 1 (puisque $a_{n+1} = a_n + o(a_n)$ on a $a_{n+1} + a_n \sim 2a_n$), et les MP pourraient en déduire (Cesàro, ou plus généralement sommation de relations de comparaisons sous certaines hypothèses !) que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \sim n$ puis deux lignes plus loin : $a_n \sim \sqrt{\ln(n)}$.
Il resterait à montrer Cesàro, c'est-à-dire essentiellement : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 150 – On peut déjà noter que la série et l'intégrale convergent (attention : on peut avoir $a = 1/2$ par exemple...). Le développement en série entière $\dfrac{1}{1+t^b}$ valable sur $[0,1[$ ne peut pas être interverti avec l'intégrale sans problème ! Pas de convergence uniforme sur un segment, mais pas non plus de convergence de $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n|$. On passe par une convergence dominée sur la suite des sommes partielles (on domine à l'aide de la fonction somme de la série). Il reste à calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}$, ce qui demande un peu de technique : $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$ puis

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$

on sait intégrer $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \dfrac{2t-1}{t^2-t+1}$, et pour le dernier morceau, $t^2 - t + 1 = (t - 1/2)^2 + 3/4$, etc. Finalement cette intégrale vaut $\dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 151 – On voit une somme de Riemann, et hop ! Sauf que non, il n'est pas question de fonction continue sur $[0,1]$. Une comparaison somme-intégrale permettra de s'en sortir :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 152 – Simple comparaison somme/intégrale

Exercice 153 – $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant m} \frac{a_p a_q}{p+q+1} = \int_0^1 P(x)^2 dx \geqslant 0$. Ensuite en écrivant $|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)}$ on obtient : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. La relation suivante ne s'établit PAS par changement de variable (ou alors : citez précisément le résultat utilisé...) mais plutôt en notant qu'elle est facile à montrer sur les monômes ! Pour la dernière question, on écrit assez naturellement :

$$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant m} \frac{a_p a_q}{p+q+1} = \int_0^1 P(x)^2 dx \leqslant \int_{-1}^1 P(x)^2 dx = -i\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{it})^2 \mathrm{e}^{it} dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{k=0}^{m} a_k^2$$

C'est super pénible d'obtenir l'inégalité optimale. On peut déjà obtenir une autre formule (qui s'obtient comme sa cousine) :

$$\int_{-1}^1 Q(x)dx = i\int_0^{\pi} Q(\mathrm{e}^{-it})\,\mathrm{e}^{-it} dt$$

De là, on peut déduire :

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx = -\frac{i}{2}\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{it})^2\, \mathrm{e}^{it} dt + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{-it})^2\, \mathrm{e}^{-it} dt$$

et on y est presque puisque $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|P(\mathrm{e}^{-it})\right|^2 dt = \int_{-\pi}^{0} \left|P(\mathrm{e}^{iu})\right|^2 du$ (via $u = -t$).
Avant l'amélioration, on avait une preuve avec deux inégalités très grossières. On a pu améliorer la deuxième et gagner ainsi un facteur 2. Mais n'espérez pas améliorer $\displaystyle\int_0^1 P(x)^2 dx \leqslant \int_{-1}^{1} P(x)^2 dx$: elle est asymptotiquement optimale ; discutez-en avec ChatGPT avec le bon prompt !

Exercice 154 – Cours ($2\,|ab| \leqslant a^2 + b^2$), IPP, interversion somme-intégrale avec Stirling ou d'Alembertisation pour justifier la convergence de $\displaystyle\sum \int |f_n|$.

Exercice 155 – Cours, CVD avec la majoration usuelle $\ln(1+u) \leqslant u$ pour la domination et du soin pour la convergence simple (fixer x, et prendre ENSUITE n assez grand). Ensuite, changement de variable pour se ramener à $[0,1[$, puis IPP, et on se souvient que $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \cdots$

Exercice 156 – Les calculs formels (interversion de symboles, que ce soit des limites ou des dérivations) nous donnent ce qu'on veut. Il s'agit donc de justifier tout cela via des dominations. L'exponentielle écrase tout, mais il faut quand même noter que f est raisonnable : puisqu'elle est lipschitzienne elle vérifie $|f(x) - f(0)| \leqslant K\,|x|$ pour tout réel x, donc $f(x) = O(x)$ en $\pm\infty$. Pour la deuxième question, avant la convergence dominée (à paramètre réel), on aura fait le changement de variable $x - y = z\sqrt{4t}$.

Exercice 157 – La fonction en jeu est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 en 0^+, et possède pour développement asymptotique en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Deux des fonctions en jeu dans le membre de droite sont d'intégrale convergente au voisinage de $+\infty$, et il reste donc à traiter $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$. Puisque « $\sin^2 x$ est souvent pas si proche de 0 que ça », on peut s'intéresser à $\displaystyle\int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+3\pi/4} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, qui s'avère être minorée par quelque chose équivalent à $\dfrac{\pi}{4k}$ (à une vache près), donc $\displaystyle\int_0^{n\pi+3\pi/4} \frac{\sin^2 x}{x} dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 158 – La fonction en jeu, disons f, est continue sur $[2, +\infty[$, et son comportement en $+\infty$ est en première approximation dicté par l'exponentielle, et en seconde par la position de α par rapport à 1.
- Si $\beta < 0$ alors $f(x) = o(1/x^2)$ en $+\infty$, d'où l'intégrabilité.
- Si $\beta > 0$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où la non-intégrabilité.
- Si $\beta = 0$:
  - Si $\alpha > 1$ alors $f(x) = o(1/x^{\beta})$ avec $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$ d'où l'intégrabilité.
  - Si $\alpha < 1$ alors $1/x^{\beta} = o(f(x))$ avec $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2} < 1$ d'où la non-intégrabilité.
  - Si $\alpha = 1$, une comparaison somme-intégrale donne la non-intégrabilité.

Exercice 159 – Exercice à la fois simple et culturel : c'est simple dès qu'on sait/se souvient qu'on va trouver un équivalent simple de I_n en réalisant une intégration par parties : $\mathrm{e}^{-t^2} = \left(-2t\mathrm{e}^{-t^2}\right) \times \dfrac{-1}{2t}$, et l'intégrale qui apparaît est majorée par $\dfrac{1}{2n^2} I_n$, donc (après bascule de l'intégrale de la droite vers la gauche) : $I_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-n^2}}{2n} \cdots$

Exercice 160 – TFA pour $F : y \mapsto \int_y^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) dt = \int_1^{+\infty} - \int_1^y$; ceci nous donne par composition la continuité sur $[0, +\infty[$ et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. La formulation de l'énoncé est fâcheuse : puisque f est continue en 0 et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x+2} \sim \frac{-\ln 2}{2\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty,$$

f n'est pas dérivable en 0, mais son graphe possède une demi-tangente verticale.

Exercice 161 – Continuité sur $[0, +\infty[$ et $O(1/x^3)$ en $+\infty$; changement de variable $t = n^{4/3}x$, convergence dominée en utilisant $|\sin(u)| \leqslant u$. Changement de variable $x = 1/t$ (bijection strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même). On calcule ensuite $2K$ via $\frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{t^2-t+1} = \frac{1}{(t-1/2)^2+3/4}$ suivi du changement de variable $t - 1/2 = \frac{\sqrt{3}}{2}u$. Finalement : $I_n \sim \frac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}\cdot$

Exercice 162 – Convergence dominée : on domine par $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

Exercice 163 – Aucun problème pour dominer afin d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. La deuxième question peut se faire via $\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0)$ mais on aurait aussi pu la traiter par convergence dominée (paramètre continu) pour trouver la même limite, à savoir $\int_0^{\pi} \sin(t)dt = 2$.

Exercice 164 – Je proposerais bien la domination, pour $x \in [0, A]$ et $t > 0$: $|\mathrm{e}^{-t}t^x| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-t}t^A & \text{sinon} \end{cases}$, ensuite, $f(x) - f(x-1)$ est l'intégrale de quelque chose de positif, et est en particulier positif (sera utile pour la suite). Le TFA nous donne la dérivabilité de $x \mapsto \int_0^x ...$ puis de g avec $g'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) \geqslant 0$, et pour pouvoir appliquer le théorème spécial sur les séries alternées, il reste à montrer que $g(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui n'est pas trop difficile, par exemple parce que pour $t \in [n-1, n]$ on a $f(t) \geqslant f(n-1) = (n-1)!$ (oui, je pense qu'on peut l'utiliser...) donc $g(n) \geqslant \ln((n-1)!) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 165 – Écrire par exemple $\cos(u) = 1 + u\varepsilon(u)$ avec ε une fonction tendant vers 0 en 0^+, et en particulier bornée...

Exercice 166 – À défaut d'intégrer l'équivalent (tentant), on peut affiner : $\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin} t} = \cdots = \frac{1}{t} + O(1)$ puis intégrer (quand on intègre quelque chose de borné entre x^2 et x^3 on obtient un $O(x^2)$).

Exercice 167 – On intègre entre 0 et n, on casse la somme en deux, on décale... finalement on trouve $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\cdot$ (Validé par Mistral)

Exercice 168 – $t = x^n$ sur $[0, X]$, puis convergence dominée sur $f_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-1/n}} \mathbf{1}_{[1,X^n]}$ (domination par $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$).

Exercice 169 – On prolonge bien sûr en posant $g(0) = f'(0)$. Ensuite, les théorèmes de régularité s'appliquent bien une fois qu'on a noté que $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il est essentiel de ne pas singulariser 0). Les dominations de toutes les dérivées selon x se font sur $[-A, A]$.

Exercice 170 – La suite $\left(\frac{r^n}{n^2}\right)$ est-elle bornée ? $\frac{1}{1-xt} = \sum_{n=0}^{\infty}(xt)^n$ pour $t \in]0,1[$ et $x \in [0,1[$... et même pour $x = 1$. Convergence normale ou convergence de $\sum \int_{]0,1[} |f_n|$. Attention, en 1 il n'y a plus convergence normale mais le deuxième théorème s'applique : les deux objets convergent et sont égaux.

Exercice 171 – IPP pour trouver $\frac{e^{-x^2}}{2x}$ (le terme tout intégré étant contrôlé par quelque chose de négligeable devant... $f(x)$!)

Exercice 172 – Convergence simple vers et dominée par $x \in]0,1] \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\cdot$ Ensuite, on développe en série entière et on déclenche un théorème de sommation terme à terme.

Exercice 173 – Pour la première intégrale, $x = 1/t$ montre que les intégrales sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ sont opposées. Pour la deuxième, IPP pour $f(x) = O(1/x^2)$ en $+\infty$, et $1/t + O(1)$ intégré sur $]x,1]$ pour obtenir $f(x) \sim -\ln(x)$ en 0^+

Exercice 174 – $-3 + 4x - x^2 = -\left((x-2)^2 - 1\right) = 1 - (x-2)^2$, donc je poserais bien $x = 2 + \sin(t)$...

Exercice 175 – J'écrirais bien $\frac{t}{\operatorname{ch}(t) - 1} = \frac{2}{t} + \varphi(t)$ avec φ bornée au voisinage de 0, pour intégrer ensuite et trouver $2\ln(2)$ comme limite.

Exercice 176 – Pour la première inégalité : étude de fonction sur $\mathbb{R}^+$ (sans les valeurs absolues) ou inégalité des accroissements finis. On a ensuite directement par convergence dominée : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis après multiplication par n, le TCD nous donnera : $I_n \sim \frac{\pi}{2n}\cdot$

Exercice 177 – On pourra établir l'inégalité suggérée via un développement en série entière (puis inégalité triangulaire) ou bien via l'inégalité des accroissements finis. Ensuite, $\left|e^{ixt} - 1\right| \leqslant |xt|$ permet de dominer pour $x \in [-X, X]$. Une fine maîtrise des complexes (et de leurs inverses...) me permet de trouver : $I(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{2} + i \operatorname{Arctan} x$.

Exercice 178 – À x fixé, L'application $g_x : t \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, et $g_x(1-u) \sim x$ quand u tend vers 0, donc g_x est prolongeable par continuité en 1. En 0 c'est plus délicat puisque $g_x(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$ si $x \geqslant 0$, mais $g_x(t) \sim \frac{1}{t^x \ln t}$ si $x < 0$, donc l'intégrale est convergente si et seulement si $-x < 1$: $\mathcal{D}_f =]-1,+\infty[$. En travaillant sur $[a,+\infty[$ avec $-1 < a$ on arrive facilement à dominer ce qu'il faut pour prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et finalement : $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ puis (valeur en 0) $f(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 179 – Convergence dominée sans problème, puis changement de variable $u = e^x$. On trouve finalement comme limite : $2\operatorname{Arctan}(e) - \frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 180 – Sans problème, $f'(x) = \frac{x}{2}f(x)$ après intégration par parties.

Exercice 181 – Théorème fondamental de l'analyse ; $t = xu$ (pour $x \neq 0$)... et la relation s'étend à $x = 0$. On peut ré-appliquer le résultat à g... qui vérifie bien ce qu'il faut !

Exercice 182 – $\ln(e + u) = \ln\left(e(1 + u/e)\right) = 1 + \frac{u}{e} + o(u)$ puis $\frac{1}{\ln\left(\ln(e+u)\right)} \sim \frac{e}{u}\cdots$

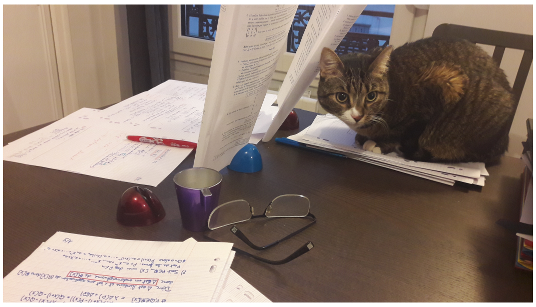
Exercice 183 – Interversion ; $u = pt$...

Exercice 184 – Au voisinage de 0 : $|f(x)| \leqslant \dfrac{x-x^2}{-\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Au voisinage de 1, on peut écrire $f(1+u) = \displaystyle\int_u^{2u+u^2} \frac{dv}{\ln(1+v)} dv$ or $\dfrac{1}{\ln(1+v)} = \dfrac{1}{v} + O(1)$ donc $f(1+u) = \ln 2 + o(1)$. Ensuite, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 1 et $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 185 – Une fois établie (par exemple après intégration par parties) la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, on prouve sans mal que f est définie et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et même $\mathbb{R}^+$. Il s'agit alors d'estimer f au voisinage de $+\infty$, ce qu'on peut typiquement faire avec deux intégrations par parties, qui donnent : $f(x) = \dfrac{\cos x}{x} + O(1/x^2)$.

Chapitre 8

Espaces euclidiens



8.1 Rappels de cours

Directement du cours :
- Cauchy-Schwarz. [PREUVE]
- Projections et symétries orthogonales.
- Distance à un sous-espace. [PREUVE]
- Définition des endomorphismes orthogonaux. [DÉFINITION]
- Matrices et endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3.
- Endomorphismes symétriques (autoadjoints). [DÉFINITION]
- Théorème spectral, versions géométrique et matricielle.

Proche du cours :
- $u \in \mathcal{S}(E)$ a toutes ses valeurs propres positives si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$.
- Encadrement, pour u autoadjoint, de $\langle u(x)|x\rangle$ à l'aide des valeurs propres de u. [PREUVE]
- Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ (hors programme, mais...).
- Unicité si on impose $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais il faut géométriser (plus difficile... mais/et/donc payant !).

8.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 186 – *Mines 2025 [7/10]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
2. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}),\ AM = MA\}$. Déterminer la dimension de E.
3. Combien l'équation $M^2 = A$ a-t-elle de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Indication pour la première question : montrer que si $V^\perp$ est stable par A alors $\mathrm{Vect}(V)$ *est stable par* A^T.

Exercice 187 – *Mines 2025 [4/10]*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à B.
2. Déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{\mathrm{T}} A P = B$.

Exercice 188 – *Mines 2025 [6/10]*

1. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in O_n(\mathbb{R})$. Comparer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(AB)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!}$ converge. On note sa limite $\exp(M)$.
3. On admet que, si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$. Montrer que, si $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 189 – *Mines 2025 [7/10]*

Soient U et V sans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

Exercice 190 – *Centrale 2025 [6/10]*

Soit $A = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$. On pose $M = AA^T$.

1. Calculer le rang de M et montrer que M est symétrique.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $M = AA^T$.

Exercice 191 – *Centrale 2025 [8/10]*

On note V_1 l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$.

1. Donner un exemple de matrice $M \in V_1$ différente de l'identité.
   Soit $M \in V_1$. Montrer que $(M - I_n)^n = 0$.
2. $(n = 4)$ Donner un exemple de matrice $A \in V_1$ telle que $(A - I_4)^2 \neq 0$ et $(A - I_4)^3 = 0$.
3. Déterminer $V_1 \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
4. Déterminer $V_1 \cap O_3(\mathbb{R})$ et, plus généralement, $V_1 \cap O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 192 – *Centrale 2025 [5/10]*

1. Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt en le justifiant.
2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(U, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = UT$.
3. Montrer que ce couple est unique.

Exercice 193 – *Centrale 2025 [5/10]*

On identifie $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On pose $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|AX\| \leq \|X\|\}$. On dit que $A \in \mathcal{C}$ est un point extrémal de $\mathcal{C}$ lorsque :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}, \qquad \left(A = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 \implies A = B_1 = B_2 \right)$$

1. Montrer $O_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$.
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $AR \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in O_2(\mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
   (c) On suppose $A \in \mathcal{C}$. Montrer que a et b appartiennent à $[-1, 1]$.

3. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$ est $O_2(\mathbb{R})$.

Exercice 194 – *Centrale 2025 [8/10]*
Déterminer toutes les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{\mathrm{T}}A^2 = A$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$.

Exercice 195 – *IMT 2025 [5/10]*
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P|Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$, où les a_k (resp. b_k) sont les coefficients de P (resp. de Q). On admet qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur E.

1. Soit $H = \{P \in E\,,\, P(1) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner la dimension.
2. Déterminer la distance de X à H.
3. On prend $n = 3$. Donner une base orthonormée de H.

Exercice 196 – *ENSEA 2025 [4/10]*

1. Montrer que l'application $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right)$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = E_{1,2} + E_{2,3}$. Déterminer la projection orthogonale de M sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 197 – *IMT 2025 [4/10]*
Soient $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien, u un vecteur non nul de E et $H = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}$. On note p le projecteur orthogonal sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer $\forall x \in E$, $p(x) = x - \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}\, u$.
2. Montrer $\forall x \in E$, $s(x) = x - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}\, u$.
3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
   Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\, x - y + z = 0\}$. Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s par rapport à H.

Exercice 198 – *IMT 2025 [4/10]*
Soient $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient les trois propositions suivantes :
(i) $u \in O(E)$;
(ii) $u^2 = -\mathrm{Id}$
(iii) $\forall x \in E^2,\ \langle u(x)|x\rangle = 0$.
Montrer si l'on suppose deux propositions vraies, alors la troisième est vraie.

Exercice 199 – *Centrale 2024 [5/10]*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ de carré intégrable. Soient $f_1, \ldots, f_n \in E$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$.

1. Montrer que les $a_{i,j}$ sont bien définis.
2. Montrer que A est symétrique et que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}}AY$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

Exercice 200 – *Centrale 2024 [6/10]*
Soit E un espace euclidien.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal. Montrer que p est autoadjoint et 1-lipschitzien.
   Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux.
2. Montrer que χ_{p+q} est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que les racines de χ_{p+q} appartiennent à $[0, 2]$.

Exercice 201 – *Centrale 2024 [8/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on pose $q(X) = \dfrac{X^{\mathrm{T}} A\, X}{X^{\mathrm{T}} X}$.

1. Énoncer le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles.
2. Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A, distinctes ou non.
   Montrer que $\lambda_3 = \operatorname{Max}\{q(X),\ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$. Énoncer une propriété similaire pour λ_1.
3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour $P \in \mathcal{P}$, justifier l'existence de
   $$\operatorname{Max}\left\{X^{\mathrm{T}} A X\ ;\ X \in P,\ \|X\| = 1\right\}$$
   puis montrer que :
   $$\lambda_2 = \operatorname*{Min}_{P \in \mathcal{P}} \left(\operatorname{Max}\left\{X^{\mathrm{T}} A\, X\ ;\ X \in P,\ \|X\| = 1\right\}\right)$$

Exercice 202 – *CCINP 2024 [5/10]*
Soient E en espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x\rangle = \|p(x)\|^2$.
2. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \operatorname{rg}(p)$.

Exercice 203 – *CCINP 2024 [5/10]*

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^2 \leqslant r \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i^2$.
3. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr}(B))^2 \leqslant \operatorname{rg}(B) \operatorname{tr}(B^2)$.
4. Soit $B \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $b_{i,i} = 1$ pour tout i et $|b_{i,j}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \neq j$.
   Montrer que $\operatorname{rg}(B) \geqslant n/2$.

Exercice 204 – *Mines 2024 [8/10]*
Soit E un espace euclidien de dimension 3. On considère une isométrie indirecte f.

1. Montrer que f se décompose en une rotation d'axe Δ et une réflexion de plan $\Delta^\perp$.
2. Cette décomposition est-elle unique ?
3. La rotation et la réflexion commutent-t-elles ?

8.3 Mais aussi

Exercice 205 – *Colles 2023/2024 [7/10]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer
$$\operatorname*{Inf}_{a,b \in \mathbb{R}} \|M - (aI_n + bJ)\|_2$$
où J est la matrice avec que des 1.

Exercice 206 – *Mines 2021 [4/10] - Thibaud C.*
Caractériser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 207 – *Polynômes de Legendre ; Mines 2016 [8/10]*

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour :
$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$
2. Montrer que les polynômes de Legendre ($P_n = \dfrac{1}{n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$) constituent une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. En dehors de toutes considérations d'orthogonalité, montrer que P_n possède n racines simples dans $]-1,1[$.
4. Déterminer $\|P_n\|^2$.

Exercice 208 – *CCP 2016 (deux fois) [4/10]*
Caractériser complètement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (euclidien) canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 209 – *Mines 2016 [5/10]*
Soient E un espace euclidien et s un endomorphisme symétrique de E. Montrer que s est k-lipschitzien si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(s), \qquad |\lambda| \leqslant k.$$

Exercice 210 – *CCP 2016 [4/10]*
Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)e^{-t}dt$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}dt$.

Exercice 211 – *TPE 2018 [5/10]*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres (avec répétition) $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrer : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2$.

Exercice 212 – *Mines 2018 [2/10]*
Soit $f : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2\, \mathrm{e}^{-t}dt$.
Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 213 – *Mines 2016, 2017, 2018... [7/10]*
Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E, et $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives ($\geqslant 0$).

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{S}(E)$, $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.
3. Soient $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u+v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$.

8.4 Indications

Exercice 186 – A est ortho-semblable à $\mathrm{Diag}(1,-3,4)$. Les sous-espaces stables de dimension 0 et 3 sont assez évidents. Pour ceux de dimension 1, ce sont comme toujours les droites portées par des vecteurs propres : il y en a 3. Pour ceux de dimension 2, le lemme nous dit qu'un hyperplan $H = V^{\perp}$ est stable si et seulement si[1] V est vecteur propre de A^{T}. Cela nous donne trois (hyper-)plans stables.
Dans l'énoncé originel la première question était posée sur $\mathbb{C}$... ce qui n'est pas sans intérêt mais complique un peu les choses : il faut adapter les arguments d'orthogonalité car on est sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel...

Exercice 187 – B est orthogonale de déterminant 1 ; notre connaissance de $SO_3(\mathbb{R})$ nous assure que (l'endomorphisme canoniquement associé à) B est une rotation. Son angle θ vérifie $\mathrm{tr}(B) = 1+2\cos(\theta) = 0$, donc $\cos\theta = -1/2$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ (selon l'orientation de l'axe. Il s'agit donc de prend un vecteur f_1 tel que $u(f_1) = f_1$, puis f_2 orthogonal à f_1 (fastoche), puis $f_3 = f_1 \wedge f_2$, et la matrice de u dans la base orthonormée $\mathcal{F}$ adaptée à la rotation sera soit B soit B^{T} : dans le second cas on prendra $\mathcal{F} = (f_1, f_2, -f_3)$ et ce sera réglé. Attention : on récupérera ainsi une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}BQ = A$, et on prendra donc $P = Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$

Exercice 188 – Exercice étrange, décousu ! Pour le premier point j'ai commencé par la cas où A est diagonale, et je n'ai guère mieux que : $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)$. Pour le prouver dans le cas général on orthodiagonalise A, puis : $AB = PDP^{\mathrm{T}}B$ a la même trace que $P^{-1}ABP = D(P^{\mathrm{T}}BP)$ qui est majorée par la trace de D, donc celle de A car $P^{\mathrm{T}}BP$ est orthogonale. Pour le deuxième point, le bon point de vue que vous aurez ultérieurement est que la série en jeu converge absolument (la série des normes converge) donc converge car on est en dimension finie. Plus élémentairement, on s'intéresse à chaque composante (i,j) de ces séries de matrices. Si on prend par exemple la norme infinie (le maximum des valeurs absolues des n^2 coefficients) alors $\left\|M^k\right\|_\infty \leqslant \|M\|_\infty^k n^{k-1}$ donc $\left|\dfrac{M^k}{k!}\right|_{i,j} \leqslant \dfrac{\|M\|_\infty^k n^{k-1}}{k!}$ qui est de série convergente, d'où la convergence absolue de chaque composante de la série $\sum \dfrac{M^k}{k!}\cdot$ Enfin,

$$\exp(xB)^{-1} = \exp(-xB) = \exp(xB^{\mathrm{T}}) = (\exp(xB))^{\mathrm{T}}$$

(passage à la limite de la relation obtenue sur les sommes partielles).

Exercice 189 – On va se ramener au cas $U = I_n$ qui est simple : après diagonalisation, il s'agit de montrer : $1 + \mu_1\mu_2...\mu_n \leqslant (1+\mu_1)...(1+\mu_n)$ avec des μ_i positifs : fastoche.
Si les deux matrices sont non inversible, c'est gagné (la somme de deux matrices symétriques positives est symétrique positive...). Sinon, on peut supposer U inversible, qu'on écrit alors U_1^2 avec $U_1 \in \mathcal{S}_n^{++}$, puis :

$$\det(U+V) = \det(U_1(I_n + U_1^{-1}VU_1^{-1})U_1) = \det(U)\det(I_n + V_1)$$

avec $V_1 = U_1^{-1}VU_1^{-1}$ qui est symétrique positive ($X^{\mathrm{T}}V_1X = ...$), donc $\det(I_n+V_1) \geqslant 1 + \det(V_1) = 1 + \dfrac{\det(V)}{\det(U)}$, et c'est gagné.

Exercice 190 – $X^{\mathrm{T}}AMX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Pour la troisième question : notons i le plus petit indice tel que la i-ème colonne est non nulle. On a alors $m_{i,i} = E_i^{\mathrm{T}}ME_i > 0$ (si $m_{i,i} = 0$, la matrice ne peut pas être de rang 1 car une autre colonne sera non colinéaire à la $i$ème). Si on note Y cette i-ème colonne et $Z = \dfrac{1}{\sqrt{m_{i,i}}}Y$, alors $M = Z^{\mathrm{T}}Z$ (en position (j,k) on a $m_{i,i}m_{j,k} = m_{j,i}m_{i,k}$ donc $m_{j,k} = \dfrac{m_{j,i}}{\sqrt{m_{i,i}}} \times \dfrac{m_{k,i}}{\sqrt{m_{i,i}}} = Z_jZ_k$)
D'où vient ce $Z = \dfrac{1}{\sqrt{m_{i,i}}}Y$? On le cherche sous la forme αY, et on veut que $\alpha^2 Y^{\mathrm{T}}Y = M$, ce qui en position (i,i) nous donne $\alpha^2 m_{i,i}^2 = m_{i,i}$

1. Le lemme proposé ne donne que le sens le plus difficile.

Exercice 191 – $I_n + E_{1,n}$ doit faire le job ; ensuite le polynôme caractéristique est $(X-1)^n$ (il est unitaire scindé sur $\mathbb{C}$, avec pour unique racine 1) et comme il est annulateur de M, on a $(M - I_n)^n = 0$. Pour $n = 4$ je prendrais bien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Une matrice symétrique réelle diagonalisable avec pour unique valeur propre 1 ne peut être que I_n. Enfin, notre connaissance de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_3(\mathbb{R})$ peut nous laisser penser que $V_1 \cap O_3(\mathbb{R})$ est petit (réduit à $\{I_n\}$). Une belle façon de le prouver consiste à fixer $X \neq 0$ un vecteur colonne : pour montrer que $AX = X$ on écrit (pour $p \geqslant n$) :

$$A^p X = (I + (A-I))^p X = X + p(A-I)X + \cdots + \binom{p}{n-1}(A-I)^{n-1}X$$

Si $(A - I)X \neq 0$, on prend k le plus petit entier tel que $(A - I)^k X = 0$, et on sait alors que $\big(X, (A-I)X, ..., (A-I)^{p-1}X\big)$ est libre, si bien que si on la complète en une base de $\mathbb{R}^n$ et qu'on prend la norme $\| \ \|_\infty$ associée, alors $\|A^p X\|_\infty \geqslant p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui n'est pas possible car $\|A^p X\|_2 = \|X\|_2$ et toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 192 – Selon la façon dont on présente Gram-Schmidt, la formule est soit magique (et il convient de justifier qu'elle fournit une base vérifiant les propriétés voulues) soit a du sens et répond au problème par construction ! La décomposition suivante est plus ou moins un exercice de cours : on géométrise le problème en notant $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$ représentée par A dans la base canonique $\mathcal{E}$ de E. Cette famille est une base car A est inversible. Si elle est orthonormée, alors A est orthogonale (matrice de passage entre deux bases orthonormées) et c'est fini puisque $A = A \times I_n$. Sinon, on l'orthonormalise en une base $\mathcal{G}$, et on retrouve plus ou moins au bluff comment les matrices de passages se multiplient plus ou moins à la Chasles. Il reste à noter que qu'on on orthonormalise, le procédé fait que la matrice de passage entre l'ancienne et la nouvelle base (dans un sens ou dans l'autre) est triangulaire supérieure. Pour l'unicité, on part de deux décompositions, on met les copains ensemble, et on se retrouve face à une matrice qui est à la fois orthogonale et triangulaire, ce qui impose qu'elle est diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale. L'énoncé est donc FAUX (mais je l'ai laissé volontairement ainsi). Il est correct si on impose à T d'avoir des coefficients diagonaux positifs.

Exercice 193 – J'ai calculé $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et ce serait bien qu'il existe θ tel que $(c-b)\cos\theta = (d-a)\sin\theta$. Et je crois que c'est possible.

En ortho-diagonalisant alors la matrice symétrique réelle AR, on trouve bien Ω_1 et Ω_2 nous ramenant à une matrice diagonale. Puisque les multiplications par Ω_1 et Ω_2 préservent les normes, la multiplication par $\Omega_1 A \Omega_2$ les diminue (au sens large), donc $a, b \in [-1, 1]$. Pour la dernière question :

— si $A \in O_2(\mathbb{R})$ est au milieu de deux éléments B_1 et B_2 de $\mathcal{C}$: On fixe $X \neq 0$. On a alors

$$\|AX\| = \left\| \frac{1}{2}B_1 X + \frac{1}{2}B_2 X \right\| \leqslant \frac{1}{2}\|B_1 X\| + \frac{1}{2}\|B_2 X\| \leqslant \frac{1}{2}\|X\| + \frac{1}{2}\|X\| = \|X\|$$

Mais $\|AX\| = \|X\|$, donc toutes les inégalités vues plus haut sont des égalités, et le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (dans un espace euclidien) nous assure que BX_1 et BX_2 sont (positivement) liés. Et comme ils sont de norme 1, ils sont égaux, puis $B_1 X = B_2 X = AX$, puis $B_1 = B_2 = A$.

— Réciproquement, soit A extrémal. S'il n'est pas dans $O_2(\mathbb{R})$, alors il existe X tel que $\|AX\| < \|X\|$. Dans la décomposition $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ on a alors $|a|$ ou $|b|$ qui est strictement plus petit que 1. Supposons par exemple $|a| < 1$: on peut alors écrire $a = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ avec $-1 < a_1 < a < a_2 < 1$, puis en prenant $B_1 = \Omega_1^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Omega_2^{-1}$ et $B_2 = \Omega_1^{-1}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Omega_2^{-1}$ on aura $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ distinctes de A mais de milieu égal à A.

Exercice 194 – Si A a le bon goût d'être inversible, alors A est orthogonale, or chaque coefficient d'une matrice orthogonale est dans $[-1,1]$, donc la seule possibilité pour que la trace soit égale à n est que la diagonale soit constituée uniquement de 1, et comme la norme de chaque colonne est 1, ça impose que $A = I_n$ (condition nécessaire assez clairement suffisante !).
Dans la suite, on suppose que A n'est pas inversible. L'application linéaire u canoniquement associée est non bijective, mais par contre on peut montrer que son image et son noyau sont supplémentaires. Et même mieux : ce sont des supplémentaires orthogonaux. Pour cela, il suffit de montrer que chaque élément du noyau, disons x, est orthogonal à chaque élément de l'image, disons $y = u(z)$, ce qui revient à montrer que $X^{\mathrm{T}}AZ = 0$, ou encore $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A^2Z = 0$, ce qui est vrai parce que $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AX)^{\mathrm{T}} = 0$. Si on prend une base orthonormée du noyau concaténée à une base orthonormée de l'image, alors on trouve une base orthonormée de l'espace dans laquelle la matrice de u est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et donc A est ORTHO-semblable à B : il existe $P \in O_n(R)$ telle que $A = PBP^{\mathrm{T}}$. C'est grâce à l'orthogonalité de P que la relation $A^{\mathrm{T}}A^2 = A$ devient $B^{\mathrm{T}}B^2 = B$ puis $C^{\mathrm{T}}C^2 = C$, ce qui impose à C d'être orthogonale. La trace de A est la trace de B, qui est majorée par $r = \mathrm{rg}(A) < n$: c'est absurde.

Exercice 195 – On gagne beaucoup à constater que $P(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \langle P|P_0\rangle$ avec $P_0 = 1 + X + X^2 + X^3$ donc $H = P_0^{\perp}$: c'est donc un sous-espace, et même un hyperplan. Ensuite, le cours (et un dessin bien entendu) nous dit que $d(X,H)^2 = \left\| p_{\mathrm{Vect}(P_0)}(X) \right\|^2 = \dfrac{\left|\langle X|P_0\rangle^2\right|}{\|P_0\|^2} = \dfrac{1}{n^2}\cdot$ Il s'agit ensuite d'orthogonaliser par exemple (en regardant les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, qui est orthonormée) :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Je trouve

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Et vous laisse revenir aux polynômes correspondants.

Exercice 196 – Si on a en tête que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires, et qu'en fait ce sont des supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire en jeu, il est facile de trouver le projeté orthogonal de M, puisqu'on se souvient de la première fois où on a montré que toute matrice peut se décomposer comme la somme d'une symétrique et d'une antisymétrique ! Bref : $p(M) = \dfrac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right)$

Exercice 197 – Cours/dessins. On a fortement intérêt à voir H comme l'orthogonal de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
On vérifie après calcul que la matrice obtenue est bien symétrique (pourquoi au fait ?) et a la même trace que la matrice de cette symétrie dans une base adaptée, à savoir...

Exercice 198 – C'est du petit bricolage...
- $(i) + (ii) \implies (iii)$: $\langle u(x)|x\rangle = \langle u(u(x))|u(x)\rangle$
- $(ii) + (iii) \implies (i)$: $\langle u\left(u(x) + x\right)|u(x) + x\rangle = \cdots$
- $(i) + (iii) \implies (ii)$: $\langle u^2(x) + x|u^2(x) + x\rangle = ?$ J'ai aussi évalué $\langle u\left(u(x) + x\right)|u(x) + x\rangle$

Exercice 199 – Cauchy-Schwarz (en intégration) n'est pas qu'une formule... et on traite les questions suivantes en notant : $\varphi(X,Y) = \displaystyle\int_I (x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)^2$

Exercice 200 – Le début est du cours. Ensuite, $p+q$ est symétrique/auto-adjoint donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et enfin on se souvient/établit que les valeurs propres maximales/minimales encadrent les $\langle (p+q)(x)|x\rangle$ pour $\|x\| = 1$.

Exercice 201 – La deuxième question est un exercice fait plusieurs fois en cours/TD (avec un minimum pour λ_1). Pour la troisième, il existe un plan ($\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, où (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de diagonalisation) pour lequel la maximum vaut λ_2. Il reste à montrer que pour tous les autres plans, le maximum vaut au moins λ_2. Or tout plan rencontre $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ de façon non triviale (la dimension vaut 2 ou 3 par Grassmann)... et pour tout $X \neq 0$ appartenant à ce plan, $q(X)$ est minoré par λ_2.

Exercice 202 – Un dessin exhibant une décomposition de x règle la première question. Trois points de vue très proches pour la seconde. Le bon est celui qui vous semble le plus naturel, mais regardez et comprenez les autres.

— On peut noter que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}} A)$ (avec A la matrice de p dans la base $\mathcal{E}$), puis orthodiagonaliser A.

— En notant $\mathcal{F}$ une base orthonormée de diagonalisation de p on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle p(e_i)|f_j\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle e_i|p(f_j)\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle e_i|p(f_j)\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n} \|p(f_j)\|^2$$

— D'après la première question,

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle p(e_i)|e_i\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}(p, \mathcal{E})\right) = \mathrm{tr}(p)$$

Exercice 203 – Orthodiagonaliser B et utiliser la deuxième question pour traiter la troisième. Il me semble ensuite que $\mathrm{tr}(B^2) = 2n-1$ donc d'après l'inégalité précédente, $\mathrm{rg}(B) \geqslant \dfrac{n}{2n-1} \geqslant \dfrac{n}{2}\cdot$

Exercice 204 – Pas trop dans l'esprit PSI... Bon, f possède forcément une valeur propre réelle (son polynôme caractéristique est de degré 3), forcément de valeur absolue égale à 1 (norme préservée). Ensuite, dès que $f(x) = \pm x$ (avec $x \neq 0$) on a $x^{\perp}$ stable par f, et la restriction de f à ce plan est une isométrie. Il reste à discuter sur la valeur propre initiale, qui nous dira si la restriction au plan est de déterminant 1 (c'est alors une rotation) ou -1 (c'est alors une symétrie orthogonale). Finalement on trouve une base orthonormée dans laquelle la matrice de f vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas il s'agit bien d'une composée commutative (calcul par bloc) comme dans l'énoncé, avec les deux cas particuliers où $\theta = 0$ (réflexion comme dans la première configuration) où $\theta = \pi$ (on trouve $-\mathrm{Id}$). Dans les deux premiers cas l'axe est unique (c'est le noyau de $f + \mathrm{Id}$) donc la décomposition aussi. Dans le dernier cas ($-\mathrm{Id}$) on peut prendre n'importe quel axe.

Exercice 205 – Après avoir résolu le système de deux équations d'orthogonalité je trouve le projeté orthogonal, puis une formule cohérente avec le cas où $M \in \mathrm{Vect}(I, J)$:

$$d^2 = \sum m_{i,j}^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \neq j} m_{i,j}\right)^2 - \frac{(\mathrm{tr} M)^2}{n}\cdot$$

Exercice 206 – Cette matrice est dans $O_3(\mathbb{R})$ et même (produit vectoriel des deux premières colonnes) dans $SO_3(\mathbb{R})$; on parle donc d'une rotation. Son axe est dirigé par tout vecteur dirigeant $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$; par exemple $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; son angle θ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = 2$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et en prenant $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp d$ on a $\sin\theta$ du signe de $\langle d \wedge e_3 | u(e_3)\rangle$ (en orientant l'axe par d)...

Exercice 207 – Pour l'orthogonalité, intégrer n fois par parties dans $\langle X^k | P_n\rangle$, avec $k < n$. Ensuite, rolliser pour obtenir de plus en plus de racines pour $\left((X-1)^n (X+1)^n\right)^{(k)}$ en n'oubliant pas la caractérisation de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme. Pour la norme, réfléchir à la valeur de $\langle P_n | X^n\rangle$ (d'une part, d'autre part...).

Exercice 208 – C'est un endomorphisme orthogonal (trois produits scalaires, trois normes), de déterminant 1 ($u(e_1) \wedge u(e_2) = +u(e_3)$) donc une rotation d'axe $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$. En regardant la trace on obtient le cosinus de l'angle. En orientant l'axe par exemple par n dirigeant $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et en fixant $x \perp n$, le signe du sinus sera celui de $\langle u(x) | n \wedge x \rangle$.

Exercice 209 – Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on diagonalise comme toujours en base orthonormée, et on pythagorise.

Exercice 210 – Un dessin sera apprécié. Il s'agit bien sûr de calculer la distance d'un vecteur à un plan. Pour calculer le projeté orthogonal $p(X^2)$, j'écris deux conditions d'orthogonalité :

$$\langle X^2 - (aX + b) | 1 \rangle = \langle X^2 - (aX + b) | X \rangle = 0,$$

ce qui me donne le projeté $4X - 2$ (on se rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt = n!$) puis :

$$\left\| X^2 - p(X) \right\|^2 = \langle X^2 - p(X) | X^2 - p(X) \rangle = \langle X^2 - p(X) | X^2 \rangle = 4$$

(on a utilisé le fait que $X^2 - p(X) \perp \mathbb{R}_1[X] \ni p(X)$).

Exercice 211 – Je ferais bien intervenir la norme usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'orthodiagonalisation $A = PDP^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$, de sorte que

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} A) = \operatorname{tr}(PD^2P^{-1}) = \operatorname{tr}(D^2) = \sum_i \lambda_i^2$$

Exercice 212 – Bien entendu, $f(x_1, ..., x_n)$ est (le carré de) la distance de -1 à un polynôme amené à décrire un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$; Pythagore et/ou le cours font le le reste.
On aura bien entendu soigneusement défini la produit scalaire auquel on pense et expliqué pourquoi c'est effectivement un produit scalaire.

Exercice 213 – Diagonaliser les symétriques en base orthonormée est souvent une bonne idée. Pour le noyau d'une somme de symétriques positifs, je regarderais comme souvent $\langle (u + v)(x) | x \rangle$... puis je prendrais bien l'orthogonal de la relation sur les noyaux pour prouver celle sur les images (dans le premier point, la somme directe est orthogonale).

Chapitre 9

Équations différentielles

9.1 Rappels de cours

— Résolution théorique et pratique des équations scalaires du premier ordre ; savoir *vraiment* pratiquer de la variation de la constante.
— Même chose pour les équations du deuxième ordre (homogène, pour la résolution pratique).
— Nature de $\mathcal{S}_H$ pour le premier ordre vectoriel. Vectorialisation.
— Systèmes différentiels linéaires (c'est essentiellement de la réduction).
— Recherche de solutions développables en série entière (analyse-synthèse).
— Raccordement de solutions, dans le cas non résolu [1].

9.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 214 – *Mines 2025 [8/10]*
Soient $a > 0$ et $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,]0, +\infty[)$.
Pour $f \in E = \mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$, on pose $T(f) : x \in]0, a] \mapsto \dfrac{1}{\int_0^x \omega(t)\,dt} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\omega(t)\,dt$.

1. Montrer que $T(f)$ est continue sur $]0, a]$ et prolongeable par continuité sur $[0, a]$.
2. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E et qu'il est continu lorsque E est muni de la norme infinie.
3. Déterminer ses éléments propres.

1. i.e. : « le machin devant y' peut s'annuler ».

Exercice 215 – *Mines 2025 [7/10]*
On note (E) l'équation différentielle $y'' = (x^2 - 1)y$.

1. Soit y_0 une solution de (E). On suppose que $y_0(0) = 0$ (resp. $y_0'(0) = 0$). Montrer que y_0 est impaire (resp. paire). *Ind.* Utiliser le théorème de Cauchy linéaire.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax^2}$ est-elle solution de (E) ?
3. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $x \mapsto u(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est solution de (E) si et seulement si u est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.
4. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $\varphi \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt$.

Exercice 216 – *Centrale 2025 [5/10]*

1. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + u + 1}$.
2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $y' = y^2 + y + 1$. Montrer que I est un intervalle borné. Expliciter y.

Exercice 217 – *CCINP 2025 [8/10]*
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Trigonaliser explicitement A.
3. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y + \mathrm{sh}(t) \\ y' = x + 3y + t\mathrm{e}^t. \end{cases}$

Exercice 218 – *IMT 2025 [4/10]*

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre $x'' + ax = 0$.
2. Résoudre $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & 2y + z \\ y'' & = & 2x - z \\ z'' & = & x + y \end{array} \right.$.

Exercice 219 – *CCINP 2024 [6/10]*
On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y'' + ty' + y = \frac{1}{t} + t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Énoncer le théorème de Cauchy linéaire.
2. On pose $g : x \mapsto f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
4. Reprendre l'exercice avec ce qui était probablement le vrai énoncé, c'est-à-dire en résolvant sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation
$$t^2y'' + ty' - y = \frac{1}{t} + t$$

Exercice 220 – *Mines 2024 [6/10]*
Soit (E) l'équation différentielle : $x^2y'(x) + y(x) = x^2$.

1. Montrer que (E) n'admet pas de solution développable en série entière.
2. Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+.

Exercice 221 – *Mines 2024 [7/10]*
On s'intéresse aux éventuelles solutions $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle

$$(E) \ : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$$

1. Montrer que $a_0 = 1/2$, $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$.
2. En déduire l'unicité de f.
3. Déterminer les a_n, le rayon de convergence de f puis exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

9.3 Mais aussi

Exercice 222 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Soit a un réel strictement positif. Discuter l'existence de solutions bornées pour l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos^3(at)$$

Exercice 223 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Résoudre sur $]-1,+\infty[$:

$$xy' + y = \frac{1}{1+x}.$$

Est-ce qu'il existe une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 224 – *CCP 2016 [4/10]*
Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions f trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}$.

Exercice 225 – *IMT 2016 [7/10]*
Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{|x|}.$$

9.4 Indications

Exercice 214 – On trouve souvent cet exercice avec $\omega = 1$... On commence par montrer que $T(x)(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} f(a)$, si possible sans ε (encadrer $T(f)(x)$ par le minimum et le maximum de f sur $[0,x]$, et utiliser le TVI)... (et au fait, le TFA nous dit que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,a]$). Pour la continuité de cette application linéaire, il suffit de montrer son caractère lipschitzien ; genre $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Pour la suite ça se corse. On fait une analyse sous l'hypothèse $T(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$ et $f \neq 0$. On obtient une équation différentielle linéaire, puis pour $x > 0$: $f(x) = K \exp\left(\left(\int_0^x \omega(t)dt\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)$
Si $\lambda \in]0,1[$, une telle fonction se prolonge en 0 pour nous fournir un élément de E qui est bien (avec $K = 1$ par exemple !) vecteur propre pour la valeur propre λ. Ça reste vrai pour $\lambda = 1$! Par contre si $\lambda \notin [0,1]$ alors $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ donc

$$\left(\int_0^x \omega(t)dt\right)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \sim \omega(0)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc λ n'est pas valeur propre.

Exercice 215 – Si $y_0(0) = 0$, alors $x \mapsto y_0(x)+y_0(-x)$ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' = (x^2-1)y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ tout comme l'application nulle... Ensuite, $a = -1/2$ est la seule valeur qui convient. Sans surprise, la factorisation par une première solution conduit à : $x \mapsto u(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est solution de (E) si et seulement si u' est solution de $y' = 2xy$, ce qui conduit à u' de la forme $x \mapsto K + \varphi(x)$.

Exercice 216 – Continuité et $O(1/t^2)$ en $\pm\infty$; $u^2+u+1 = (u+1/2)^2+3/4$ qui nous amène à $u+1/2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, puis l'intégrale vaut $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.
Supposons ensuite : $[t_0, +\infty[\subset I$. Le changement de variable $x = y(t)$ (qui ne nécessite en aucun cas que y soit strictement croissante, et encore moins un difféomorphisme, même si c'est le cas ici...) nous donne :

$$\int_{t_0}^{T} \frac{y'(t)}{y(t)^2+y(t)+1}dt = \int_{y(t_0)}^{y(T)} \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Mais l'intégrale de gauche vaut $T-t_0$, donc on a un petit problème quand T tend vers $+\infty$. Sur la même idée, on trouvera pour solutions les applications

$$t \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - K\right) - \frac{1}{2}$$

Exercice 217 – $\chi_A = (X-1)^2$, puis on trouve un vecteur propre, par exemple $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis un vecteur X_2 tel que $AX_2 = X1 + X_2$, ou encore $(A-I)X_2 = X_1$: $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fait l'affaire. Bref, $A = P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Le système différentiel $X' = AX + \begin{pmatrix} \mathrm{sh}t \\ te^t \end{pmatrix}$ est alors équivalent, en posant $X_1 = P^{-1}X$, à $X_1' = TX_1 + P^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{sh}t \\ te^t \end{pmatrix}$: il reste un peu de travail avec certainement une variation de la constante. Si on ne fait pas de refus d'obstacle, l'examinateur nous arrête probablement avant la fin !

Exercice 218 – La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, avec pour valeurs propres 0, $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$. En écrivant $B = PDP^{-1}$ et en posant $X_1 = P^{-1}X$ le système $X'' = BX$ est équivalent à $X_1'' = DX_1$. On en déduit X_1 puis $X = PX_1$.

Exercice 219 – L'essentiel est de justifier l'équivalence (gestion de la quantification en x vs t, le « on pose ... » ne signifiant pas grand chose sans précision). Pour l'équation « avec un plus » je trouve $K_1\cos(\ln t) + K_2\sin(\ln t) + \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{2}t$ alors que « avec un moins » j'obtiendrais plutôt $K_1 t + \dfrac{K_2}{t} + \dfrac{1}{2}t\ln t - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln t}{t}$.

Exercice 220 – Une éventuelle solution DSE $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ devrait vérifier $a_n = (n-1)!$ pour tout $n \geqslant 1$, mais alors le rayon de convergence serait nul. Il s'agit ensuite de déterminer les K tels que $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}\left(K + \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t}dt\right)$ est bornée. Une condition nécessaire (obtenue en 0^+) est d'avoir $K = 0$. Réciproquement, en prenant K ainsi on majore facilement la (valeur absolue de) cette quantité en x par $|x|$: elle répond au problème.

Exercice 221 – On trouvera comme unique solution DSE l'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si} x \neq 0 \end{cases}$

Exercice 222 – Les solutions de l'équation homogène sont bornées, et le second membre vaut $\dfrac{1}{4}(\cos(3at) + 3\cos(at))$ donc ça résonne si et seulement si $a \in \{1, 1/3\}$.

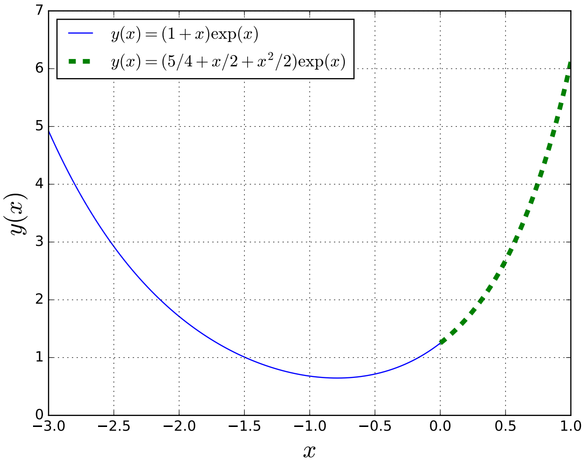
Exercice 223 – Le recollage en 0 fournit comme unique solution $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Cette fonction est développable en série entière au voisinage de 0 donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 224 – C'est à la frontière du cours... La structure de $\mathcal{S}_H$ (espace vectoriel de dimension 3) est ce que vous imaginez. Ensuite au delà de la dimension 2, est-ce au programme qu'une base est constituée des $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ avec λ décrivant les racines complexes du polynôme auquel on pense, sous l'hypothèse qu'elles sont distinctes ? À voir. Quoi qu'il en soit ici cela donne des solutions complexes, et on trouve des solutions réelles via leurs parties réelles et imaginaires :

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}\{\mathrm{e}^t, \cos\left(\sqrt{3}t/2\right)\mathrm{e}^{-t/2}, \sin\left(\sqrt{3}t/2\right)\mathrm{e}^{-t/2}\}$$

Face à un examinateur grognon on peut toujours sortir ces solutions du chapeau, prouver qu'elles constituent une famille libre et conclure par dimension. Si vous ne savez absolument pas d'où vient cette histoire de $\mathrm{e}^{\lambda t}$*, il est bien évident que vous vous exposez à quelques ennuis, mais...*
Pour une solution particulière, on en cherche une de la forme $K\mathrm{e}^t$ si $p \neq 1$, et $t \mapsto Kt\mathrm{e}^t$ si $p = 1$.

Exercice 225 – Il s'agit de recoller $x \mapsto (\alpha + \beta x + x^2/2)\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto (\gamma + \delta x))\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}/4$. Je trouve comme conditions nécessaires et suffisantes de raccordement : $\alpha = \gamma + 1/4$ et $\beta = \delta - 1/2$.



Un raccord... avec $\gamma = \delta = 1$

N.B. : Pour le raccord, on peut élégamment contrer l'analyse-synthèse usuelle grâce à Cauchy-Lipschitz, ici.

Chapitre 10

Fonctions de plusieurs variables, topologie

10.1 Rappels de cours

- Savoir montrer qu'un ensemble est fermé (stable par passage à la limite, ou image réciproque d'un fermé par une application continue).
- Savoir montrer qu'une fonction est continue : décomposer en sommes, produits, composées de fonctions élémentaires ; on termine/commence en général par des applications-coordonnées $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$ (qui sont continues car linéaires entre espaces de dimension finie).
- Une fonction continue sur un fermé borné (en dimension finie) et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.
- Condition nécessaire pour qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ possède un extremum local en un point intérieur. [PREUVE ?]
- Condition suffisante pour posséder un extremum local via la hessienne. Il s'agit de bien comprendre les 4 situations en fonction des signes (stricts ou non) des valeurs propres.

10.2 Posé aux deux dernières sessions

Exercice 226 – *Mines 2025 [9/10]*
Soient $n \geqslant 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma : [0,1] \to U$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [0,1],\ B(\gamma(t), \delta) \subset U$.

Exercice 227 – *Mines 2025 [6/10]*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |\ P(z)\ | \geqslant |\ \mathrm{Im}\, z\ |^{\deg P}$$
2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 228 – *Centrale 2025 [7/10]*
Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

1. Soit $S = \{(x, y, z)\,,\ z = f(x, y)\}$. Déterminer l'équation du plan tangent à S en un point $(a, b, c) \in S$.
2. Montrer que f est minorée puis qu'elle admet un minimum atteint en un point que l'on déterminera.

Exercice 229 – *Centrale 2025 [7/10]*
Soit $f : (x, y) \mapsto (x - y)^3 + 6xy$.

1. La fonction f admet elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Déterminer ces extrema.
3. Étudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 230 – *IMT 2025 [4/10]*
Soit E un espace euclidien. On fixe $k \in [0, 1[$, et on considère l'ensemble :
$$F = \{f \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|\}\,.$$

1. Déterminer l'ensemble F lorsque $k = 0$.
2. Vérifier que l'application identité Id n'appartient pas à F (si $E \neq \{0\}$!).
3. Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (si $k \neq 0$!).
4. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathcal{L}(E)$ telle que F est une boule fermée pour cette norme.

Exercice 231 – *IMT 2025 [7/10]*
Trouver les plans tangents à la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z = 1$, qui sont parallèles au plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 232 – *Mines 2024 [5/10]*

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'un changement de variables classique, résoudre l'équation
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$
d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.
2. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} f(x, y)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

Exercice 233 – *CCINP 2024 [6/10]*
Soient $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - y^2$ et $C = \{(x, y),\ h(x, y) = 0\}$.

1. Montrer que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, puis montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de h. La fonction h admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x, y) = 0$ pour tout (x, y) dans C.
   (a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t^2, t^3\right) = 0$. En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi_t : u \mapsto f(t^2, u)$. Justifier que φ_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'il existe $\gamma(t) \in \left]-t^3, t^3\right[$ tel que $\varphi_t'(\gamma(t)) = 0$
   (c) Conclure que $(0, 0)$ est un point critique pour f.
   (d) Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble C.

10.3 Mais aussi

Exercice 234 – *Colles 2023/2024 [1/10]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On note $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$. Montrer que $p(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 235 – *Colles 2023/2024 [3/10]*
L'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\| \ \|_\infty$ et on note A l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f \geqslant 1$.

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.

Exercice 236 – *Colles 2023/2024 [5/10]*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Donner un sens précis à cette limite.
2. Donner un exemple de telle fonction.
3. Montrer qu'une fonction vérifiant cette hypothèse possède forcément un minimum global.

Exercice 237 – *Centrale 2018 [8/10]*
On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

1. (a) Déterminer les points critiques de f.
   (b) Déterminer les bornes inférieure et supérieure de f sur $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, on prend E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E, et on définit
$$\varphi : x \in E \longmapsto \langle u(x)|x\rangle \mathrm{e}^{-\|x\|^2}.$$
2. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de φ sur E.

Exercice 238 – *Mines 2018 [6/10]*
Soit E un espace vectoriel normé et A une partie ouverte de E. Montrer que $U = \displaystyle\bigcup_{a \in A} B_f(a, 1)$ est un ouvert. *(Il s'agit des boules fermées.)*

Exercice 239 – *Mines 2018 [9/10]*
Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{\sinh x - \sinh y}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition A de f. Montrer qu'il est ouvert.
2. En quels point de A f est-elle continue ?
3. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 240 – *Mines 2017 [9/10]*

1. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Existe-t-il $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$?
2. Même question dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   On pourra composer φ avec le déterminant.

10.4 Indications

Exercice 226 – Un bien bel exercice, mais qui nécessite une bonne préparation/culture, sans indication ! Un dessin nous invite à considérer la distance au complémentaire $F = E \setminus U$. De fait, l'application $D : x \mapsto \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$ est définie et continue car 1-lipschitzienne (oui, c'est culturel ! C'est en soi un exercice). Il reste à considérer $t \mapsto D(\gamma(t))$: elle est continue sur le segment $[0, 1]$ donc possède un minimum. Ce minimum vaut $D(\gamma(t_0)) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|\gamma(t_0) - y\|$. Cette borne inférieure est en fait un minimum (il s'agit de la borne inférieure sur un fermé borné, genre $F \cap \overline{B}(\gamma(t_0), R)$ avec R assez grand), donc est strictement positif, et c'est gagné.

Exercice 227 – Pour le sens direct, $|z - x_i| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|$ pour toute racine $x_i \in \mathbb{R}$. Pour la réciproque, raisonner par l'absurde et prendre pour z une racine non réelle. Ceci nous fournit une CNS fermée pour être trigonalisable : si $M_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} M$ avec chaque M_p trigonalisable alors $\chi_{M_p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_M$ (coefficient par coefficient) donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\chi_{M_p}(z) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_M(z)$ donc par passage à la limite $|\chi_M(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z\,|^{\deg P}$, et χ_M est scindé donc M trigonalisable. Pour la dernière question, une inclusion est évidente puisque les diagonalisables sont incluses dans les trigonalisables, qui constituent un ensemble fermé. Réciproquement, si M est trigonalisable, on l'écrit $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire et on prend une suite de matrices triangulaires tendant vers T mais avec n valeurs distinctes sur la diagonale...

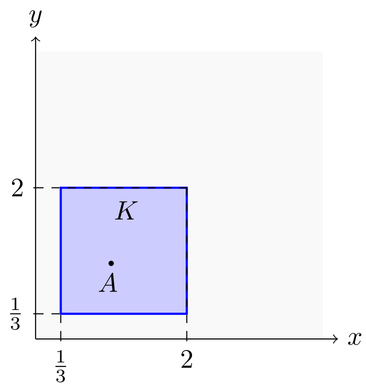
Exercice 228 – S est définie par la relation $G(x, y, z) = 0$, avec $G : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, et le plan tangent à S en $M_0(a, b, c)$ possède pour vecteur normal ∇G_{M_0}, donc une équation de ce plan $\mathcal{P}$ est : $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{M_0 M} | \nabla G_{M_0} \rangle = 0$, soit encore :

$$(b - 1/a^2)(x - a) + (a - 1/b^2)(y - b) + (z - c) = 0$$

ou encore, il me semble :

$$(b - 1/a^2)x + (a - 1/b^2)y + z = -3ab$$

Ensuite, f est minorée par 0, « et prend de grande valeur quand on s'approche des deux bords », ce qui va nous permettre de montrer que la borne inférieure (positive) de f est en fait un minimum.
Pour cela, on note déjà que f possède un unique point critique : $A(1, 1)$, en lequel elle vaut 3 et où sa hessienne est définie positive, ce qui nous fournit un minimum local. On considère ensuite le fermé borné $K = [1/3, 2] \times [1/3, 2]$.



Si $(x, y) \notin K$ alors x ou y est majoré par $1/3$ (donc $f(x, y) \geqslant 3$) ou bien les deux sont minorées par 2 (et alors $f(x, y) \geqslant 4$. Dans les deux cas, $f(x, y) \geqslant 3$ en dehors de K, alors que sur K la fonction continue f possède un minimum lui-même majoré par 3. La fonction f possède donc un minimum global, qui est pris dans K. Ce minimum global est un extrémum local, donc c'est $f(1, 1) = 3$.

Exercice 229 – On peut rendre $f(x, y)$ aussi grand ou petit qu'on veut ($f(x, 0)$ vs. $f(0, y)$), donc il n'y a pas d'extrémas globaux. Il y a un seul point critique qui est $(1/2, -1/2)$ en lequel la hessienne a deux valeurs propres de signe opposé. Pas d'extremum local, donc. Par contre si on regarde sa restriction au disque fermé unité, comme celui-ci est fermé borné, il y a des extrémas qui sont pris soit à l'intérieur

(NON : on a vu qu'il n'y a ici pas d'extremum en le point critique) soit donc sur le bord. On s'intéresse alors à $f(\cos\theta, \sin\theta)$; on trouve comme maximum 3 pris en deux points, et minimum $-2\sqrt{2}-3$ pris en $(-1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
J'imagine que tout le monde a bien vu la factorisation :

$$\frac{d}{d\theta}\left(f(\cos\theta, \sin\theta)\right) = 3(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)(2 - \cos\theta + \sin\theta)$$

Exercice 230 – C'est bien de savoir que $u \mapsto \operatorname*{Sup}_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|$ constitue une norme sur $\mathcal{L}(E)$. Il suffit alors de considérer $u \mapsto \dfrac{1}{k}\operatorname*{Sup}_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|$ qui est probablement une norme également !

Exercice 231 – Le gradient de l'application $\mathcal{C}^1$ $G : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z-1$ porte un vecteur normal à la surface, et le plan d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $n_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (rappel : $x+y+z$ est un produit scalaire entre $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et un vecteur pas très mystérieux.
Il s'agit donc de trouver les (x_0, y_0, z_0) tels que le gradient est colinéaire à n_0, c'est-à-dire tels que $2x_0+4 = 2y_0+6 = 2z_0-2$. Ces relations donnent x_0 et y_0 en fonction de z_0, et l'équation de la surface impose de plus $z_0^2 - 2z_0 - 4 = 0$, c'est-à-dire $z_0 = 1 \pm \sqrt{5}$: les plans tangents aux points (x_0, y_0, z_0) correspondants ont alors pour équation $x+y+z = x_0+y_0+z_0 = 3z_0 - 7 = -4 \pm 3\sqrt{5}$
ChatGPT me dit que c'est $-4 \pm \sqrt{30}$: à vous de nous départager !

Exercice 232 – On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,\pi/2[$, et l'équation devient (avec une quantification à soigner) $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = \alpha g$ puis $g(r,\theta) = \varphi(\theta) r^\alpha$ et enfin

$$f(x,y) = \varphi\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

Pour la deuxième équation, $g(r,\theta) = \varphi(\theta)\mathrm{e}^r$.

Exercice 233 – J'ai (évidemment !) commencé par la dernière question... $f(x,0) - f(0,0)$ prend des valeurs strictement positives et d'autres strictement négatives au voisinage de $x=0$, donc f ne possède pas d'extrémum local en $(0,0)$. Ensuite, $2t\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + 3t^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3) = 0$ donc pour $t \neq 0$, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2,t^3) + 3t\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2,t^3) = 0$. En faisant tendre t vers 0^+ on obtient bien $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
Rolle entre $-t^3$ et t^3 donne l'existence de $\gamma(t)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, \gamma(t)) = 0$, et on fait tendre t vers 0.

Exercice 234 – Faire un dessin. Revenir à la définition (ne pas se jeter sur les hypothèses mais regarder ce qu'on veut montrer, comme d'habitude...).

Exercice 235 – L'application linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est 1-lipschitzienne donc continue, par exemple. Ensuite, si $f \in A$ alors $\displaystyle\int_0^1 (f(t)-1)dt = 0$, donc l'application **continue** $f-1$ ne saurait être à valeurs négatives (au sens large) puisqu'elle prend (en 0) au moins une valeur strictement négative.

Exercice 236 – L'application $(u,v) \mapsto u^2 + 2v^2$ doit faire le job, mais pas $(u,v) \mapsto (u+v)^2$... Si on note $A = f(0)$: il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| \geqslant R$, on a $f(x) \geqslant A+1$. Par ailleurs f est continue sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R (qui est borné fermé bien entendu) donc possède un minimum sur ce disque... qui sera le minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 237 – Joli exercice ! Pour f on trouve 5 points critiques $(0,0,(0,\pm 1)$ et $(\pm\sqrt{2},0)$ Puisque $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque $\|(x,y)\|$ tend vers $+\infty$ (point intéressant à détailler !) on est assuré d'un maximum pris en un point critique ; c'est donc $f(0,1)=2\mathrm{e}^{-1}$.
Pour φ, il convient évidemment de se placer dans une base orthonormée de diagonalisation dans laquelle on a essentiellement : $\varphi(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)\mathrm{e}^{-\sum x_i^2}$.
Outre $(0,0)$, les points critiques sont les x pour lesquels il existe i_0 tel que $x_{i_0}\neq 0$, $\sum\lambda_i x_i^2=\lambda_{i_0}$, et $x_i=0$... pour tout i tel que $x_{i_0}\neq 0$ (attention aux valeurs propres multiples !) ; ces points sont donc des vecteurs propres. Il reste à maximiser (en $\|x\|$ et en i) $\lambda_i\,\|x\|\,\mathrm{e}^{-\|x\|^2}$, et on trouvera $\lambda\mathrm{e}^{-1}$, avec λ la plus grande valeur propre de u.

Exercice 238 – On prend $x_0\in U$ et on cherche $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\subset U$. Il existe $a_0\in U$ tel que $x_0\in B_f(a_0,1)$ et comme U est ouvert, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $B(a_0,\varepsilon_0)\subset U$. Je serais alors bien tenté (après un dessin) de montrer que $B(x_0,\varepsilon_0)\subset U$. Pour cela, je prends $y_0\in B(x_0,\varepsilon_0)$ et je cherche $a\in U$ tel que $\|a-y_0\|\leqslant 1$. En faisant vivre le dessin, je suis tenté d'écrire : $y_0=(a_0+(y_0-x_0))+(x_0-a_0)$...
Vous n'avez pas fait de dessin et donc rien compris à la dernière ligne ? Relisez cette phrase et méditez !

Exercice 239 – C'est assez culturel : pour traiter ce genre d'expression, la formule de Taylor avec reste intégral suivie d'un changement de variable pour se ramener à $[0,1]$ donne

$$\sinh(x)-\sinh(y)=(y-x)\int_0^1\cosh\left(x+(y-x)u\right)du.$$

On écrit la même chose avec le numérateur, et on se retrouve ainsi avec une fraction de termes qui sont des intégrales avec comme paramètres (x,y). Il faut alors « interpoler » les théorèmes au programme de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^2$ (pour le domaine de vie des paramètres), et tout va bien puisque le numérateur et le dénominateur tendent vers 1 lorsque (x,y) tend vers (x_0,x_0).

Exercice 240 – Une façon de procéder est de relier toute matrice inversible continûment à I_n (puis faire de la soudure sur les chemins). Pour cela, on peut par exemple noter que des opérations élémentaires (transvections et échanges de ligne) permettent de ramener une matrice inversible à une matrice diagonale avec des éléments diagonaux non nuls. Il reste à trouver un chemin continu entre tout complexe non nul et 1 : facile (faites un dessin, misérables !)... mais aussi à relier toute matrice de transvection à l'identité (facile) et enfin les matrices d'échanges à l'identité. Si on y arrive sur $S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, c'est gagné. Et pour passer de I_2 à $S=P\,\mathrm{Diag}(1,-1)P^{-1}$ je passerais bien par $P\,\mathrm{Diag}(1,\mathrm{e}^{i\pi t})P^{-1}$...
Si $\det(A)>0$ et $\det(B)<0$, alors un éventuel chemin φ reliant A à B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifierait, en posant $\psi=\det\circ\varphi$: $\varphi(0)>0>\varphi(1)$, imposant (par continuité, via le théorème des valeurs intermédiaires) à ψ de s'annuler, donc à φ de quitter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.