



ζ(2) via Riemann-Lebesgue

1. (a) Des intégrations par parties banales effectuées calmement nous conduiront au bon résultat :

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

On aura bien entendu pensé à simplifier les $\cos(n\pi)$ et $\sin(n\pi)$, sachant que n est entier. *Bien entendu...*

- (b) Oui.

- (c) Au vu des résultats précédents, il *suffit*¹ manifestement de prendre :

$$b = -1 \text{ puis } a = \frac{1}{2\pi}.$$

2. (a) Calcul fait 100 fois... $S(t)$ est la partie réelle de $\sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} = e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}$ (on avait noté que $e^{it} \neq 1$, puisque $t \in]0, \pi]$). Un passage à l'angle moitié fournit ensuite :

$$S(t) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

- (b) Vous vous débrouillez² comme vous voulez pour trouver :

$$\sin \theta \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\theta + \beta) + \sin(\theta - \beta)).$$

- (c) En combinant ce qui précède, on obtient : $S(t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}$, soit encore :

$$S(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

3. (a) Une intégration par parties fournit :

$$\int_a^b f(t) e^{\lambda it} dt = \frac{f(b) e^{\lambda ib} - f(a) e^{\lambda ia}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(t) e^{\lambda it} dt.$$

En majorant d'abord le module de la somme par la somme des modules, puis le module de l'intégrale par l'intégrale du module, on obtient en deux temps :

$$\left| \int_a^b f(t) e^{\lambda it} dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

« *M'sieur, j'ai rien compris à vos majorations !* » « *Hum... quel est le module de $e^{\lambda it}$ à ton avis ? Et as-tu écrit le calcul, plutôt que de l'imaginer dans ta tête ?* »

1. Et personne n'aura écrit qu'il *fallait* : c'est certes vrai, mais en général non justifié, ce n'est pas demandé, et surtout ça ne répond pas à la question...

2. Par exemple : « Hey, je sais que $\sin(\theta + \beta)$ et $\sin(\theta - \beta)$ font intervenir ce produit. Je les écris et je combine ». Ou encore : passage par l'écriture complexe du sinus et du cosinus

- (b) Il suffit de voir que $\int_a^b \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$ est la partie imaginaire de $\int_a^b \psi(t)e^{i(n+1/2)t} dt$, et que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ d'après la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\int_a^b \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

4. On commence par montrer que φ admet une limite finie en 0. Pour cela, on va tout mettre sous même dénominateur. Celui-ci a un équivalent gratuit. Pour le numérateur, il suffit de partir d'un développement limité du sinus à l'ordre 3, et on obtient ainsi :

$$\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{\frac{t}{2}} = \frac{t/2 - (t/2 - t^3/6.8 + o(t^3))}{t/2 \sin(t/2)} \sim \frac{t^3/48}{t^2/4} \sim \frac{t}{12}.$$

Ainsi, φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$ en posant $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Le calcul précédent nous donne même un développement limité à l'ordre 1, assurant le caractère dérivable de $\tilde{\varphi}$ en 0 avec $(\tilde{\varphi})'(0) = \frac{1}{12}$. Il reste à vérifier la continuité de la dérivée, c'est-à-dire : $(\tilde{\varphi})'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{12}$. Le calcul est de même nature (mais à l'ordre 4 en t) et laissé au lecteur.

5. Pour $t > 0$, on a d'après la question 2 :

$$S(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((n+1/2)t)}{2} \left(\varphi(t) + \frac{2}{t} \right)$$

et ainsi :

$$(at^2 + bt)S(t) = -\frac{1}{2}(at^2 + bt) + \sin((n+1/2)t) (at + b + (at^2 + bt)\varphi(t)/2).$$

Grâce à la question précédente, on peut étendre cette relation à $[0, \pi]$ (en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$). Cette relation, une fois intégrée entre 0 et π , fournit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (at^2 + bt) dt + \int_0^\pi \sin((n+1/2)t) (at + b + (at^2 + bt)\tilde{\varphi}(t)/2) dt.$$

La question 3b nous dit que la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \int_0^\pi (at^2 + bt) dt = -\frac{a}{2} \frac{\pi^3}{3} - \frac{b}{2} \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6},$$

et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$