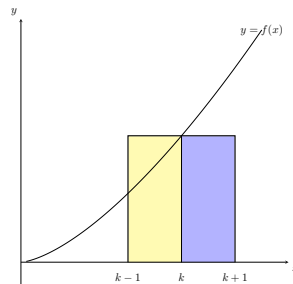


Ce corrigé possède beaucoup de petites remarques. Il est essentiel que vous les travailliez... SURTOUT si vous ne les comprenez pas à la première lecture... ou si vous les trouvez trop évidentes : vous êtes probablement passés à côté de quelque chose.

Comparaison somme-intégrale

- 1) Il s'agit de faire un dessin où l'on voit $f(k)$ comme l'aire d'un rectangle, qui doit être visiblement majorée par une aire sous la courbe de f (entre k et $k+1$)... et minorée de même par l'aire sous la courbe, entre $k-1$ et k .



Il semblerait donc qu'on ait :

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt$$

On ne veut pas 15 rectangles : on en veut EXACTEMENT deux. Et pas n'importe lesquels : ils doivent être d'aire $f(k)$. Certains vont penser comprendre ce dessin du premier coup, et vont hélas me prouver trois ou quatre fois qu'ils n'ont essentiellement pas compris. Faites moi mentir !

- 2) Pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(t) \leq f(k)$ (croissance de f), donc en intégrant l'inégalité entre la fonction f et la fonction constante $t \mapsto f(k)$, on trouve :

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \leq \int_{k-1}^k f(k)dt = f(k).$$

L'inégalité de droite se traite évidemment de la même manière.

Ainsi, on a $\int_0^1 f \leq f(1) \leq \int_1^2 f$, $\int_1^2 f \leq f(2) \leq \int_2^3 f$, ..., $\int_{n-1}^n f \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f$, donc en sommant ces encadrements on obtient par chaslisation :

$$\int_0^n f \leq S_n \leq \int_1^{n+1} f$$

On vous a dit que ces petits points plutôt que des quantificateurs ce n'était pas rigoureux ? On s'est moqué de vous. Ou peut-être (sûrement) on peut placer les exigences de « rigueur » ailleurs en première année. Les réglages vont se faire dans les premières semaines.

- 3) Pour chacune de ces intégrales on réalise une intégration par parties. On trouve ainsi :

$$ne^n - e^n + 1 \leq S_n \leq (n+1)e^{n+1} - e^{n+1}$$

Bien entendu¹ en aucun cas on ne « pose » $v'(t) = e^t$. Si on souhaite avoir $v'(t) = e^t$ on peut par exemple écrire : « pour avoir $v'(t) = e^t$, il suffit de poser $v(t) = e^t$ ». Les adeptes des symboles

1. Hum...

mystérieux n'auront en tout cas certainement pas² écrit $v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t$, qui est grossièrement faux.

Dans l'encadrement précédent le minorant est équivalent à ne^n et le majorant est équivalent à nee^n .

En divisant tout ce beau monde par ne^n on obtient donc $\frac{S_n}{ne^n}$ encadré par deux choses convergentes donc bornées, donc lui même borné, ce qui nous donne, comme demandé :

$$S_n = O(ne^n) \quad \text{et} \quad ne^n = O(S_n). \text{ Bref : } S_n = \Theta(ne^n)$$

Ne pas croire que quand $u_n \leq v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \leq w_n$ (penser à $u_n = n+1$, $v_n = n+2$ et $w_n = n$). Par contre si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et puisque $v_n \sim w_n$ on en déduit $u_n = O(w_n)$. Vous doutez, faute d'avoir pratiqué les équivalents et/ou les O ? Essayons de montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{w_n}\right)$ est bornée en écrivant, au hasard : $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \dots$

Transformation d'Abel

4) Il suffit de se laisser guider :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^n kV_k - \sum_{k=1}^n kV_{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^n iV_i - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)V_i = nV_n + \sum_{i=1}^{n-1} (i - (i+1))V_i - V_0 \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$S_n = nV_n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} V_i$$

Dans le passage de la première à la deuxième ligne on a seulement renommé l'indice dans la première somme, alors qu'on a réalisé le changement d'indice $i = k-1$ dans la seconde.

5) Le seul résultat à connaître sur le sujet est :

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ alors } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ici, et puisque $e \neq 1$:

$$V_n = \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} \sim \frac{e^{n+1}}{e - 1}.$$

On vous a fait croire que les équivalents c'était le mal ? Dommage, il va falloir rattraper le temps perdu ! Notons aussi que quand on sait que la raison est plus grande que 1 il peut être prudent d'écrire $\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, puisqu'on préfère tous manipuler des quantités positives, n'est-ce pas ?

En sommant, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n-1} V_k = -\frac{n-1}{e-1} + \frac{1}{e-1} \sum_{k=1}^{n-1} e^{k+1} = -\frac{n-1}{e-1} + \frac{1}{e-1} (V_n - 1 - e)$$

et puisque $V_n \sim \frac{e^{n+1}}{e-1}$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} V_k \sim \frac{e^{n+1}}{(e-1)^2}$$

2. Hum again...

- 6) D'après les questions précédentes, S_n est la somme d'un terme équivalent à $\frac{e}{e-1}ne^n$ et de deux termes négligeables devant ne^n , donc :

$$S_n \sim \frac{e}{e-1}ne^n$$

Pour ceux qui n'ont hélas pas pris l'habitude de travailler avec les équivalents en première année, il va falloir choisir entre :

- vous rouler par terre avec des « ralala c'est vraiment trop compliqué et trop injuste » ;
- bosser tout ça ! Ici, le raisonnement implicite était (sachant qu'il n'est pas question de sommer les équivalents : sur ce point on ne vous a pas menti) :

$$S_n = \frac{e}{e-1}ne^n + o(ne^n) + o(ne^n) + o(ne^n) \sim \frac{e}{e-1}ne^n$$

Le point qui doit devenir automatique, c'est : si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n) \dots$ et si $u_n = v_n + o(v_n)$ alors $u_n \sim v_n$.

Dans la première partie, on a montré que le rapport $\frac{S_n}{ne^n}$ était coincé entre deux constantes strictement positives (asymptotiquement entre 1 et e). Ici on a montré que ce rapport tend en fait vers $\frac{e}{e-1}$, ce qui est bien plus fort ; et accessoirement on vérifie **sans calculatrice** l'encadrement

$$1 \leq \frac{e}{e-1} \leq e$$

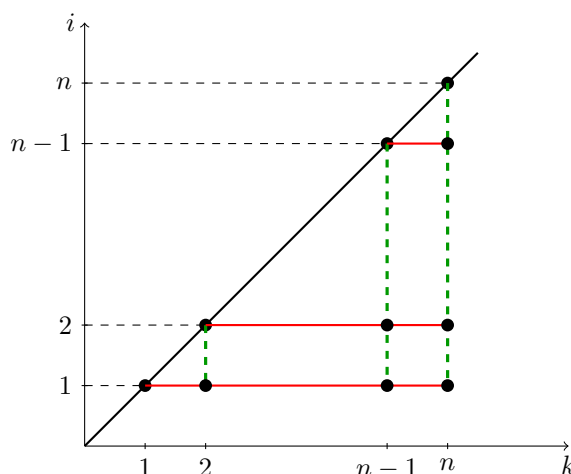
Bref :

Tout va bien.

Interversion de somme

- 7) Le dessin suivant est limpide pour moi :

- les traits hachurés verticaux joignent les différents couples (k, i) de $\sum_{i=1}^k u_{k,i}$ à k fixé ;
- les traits pleins horizontaux joignent les différents couples (k, i) de $\sum_{k=i}^n u_{k,i}$ à i fixé.



$$\text{« On a donc » } \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k u_{k,i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n u_{k,i} \right)$$

Une autre façon, plus formelle mais qui parle plus à certains, est de voir la somme comme une somme sur les couples (k, i) tels que $1 \leq i \leq k \leq n$.

8) Appliquons l'interversion précédente : on trouve alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k 1 \right) e^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k e^k \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n e^k \right) = \sum_{i=1}^n (V_n - V_{i-1}) = nV_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

(puisque $V_0 = 1$, on retrouve bien la formule de la question 4, mais de façon un peu moins coûteuse, je trouve).

On peut conclure de la même façon avec les calculs effectués à la question 5.

$$S_n \sim \frac{e}{e-1} ne^n$$

Utilisation d'une fonction auxiliaire

9) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, on a immédiatement :

$$S_n = ef'(e)$$

On vous a fait croire que « les petits points, c'est pas rigoureux ? » *ENCORE UN MENSONGE ! Vos (probables) problèmes de rigueur sont ailleurs...*

10) On a $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$, donc pour ces mêmes x on aura $f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1}}{(x-1)^2}$, puis :

$$S_n = ef'(e) = \frac{(n+1)e^{n+1}}{e-1} - \frac{e^{n+1}}{(e-1)^2} \sim \frac{ne^{n+1}}{e-1} = \frac{e}{e-1} ne^n.$$

Same player shoot again

11) Une comparaison somme-intégrale nous donne :

$$\int_0^n t^{999} dt \leq \sum_{k=1}^n k^{999} \leq \int_1^{n+1} t^{999} dt$$

Le membre de gauche et le membre de droite sont équivalents à $\frac{n^{1000}}{1000}$, donc en divisant les trois termes de l'encadrement par cette quantité, on peut gendarmiser et en déduire :

$$\sum_{k=1}^n k^{999} \sim \frac{n^{1000}}{1000}.$$

On rappelle que le théorème des gendarmes ne raconte pas que la limite vaut... il raconte qu'une certaine quantité possède une limite (qui est ce qu'on pense). Une bonne partie d'entre vous n'ont pas compris ce point essentiel, qui est une ligne de démarcation entre les maths pré-bac et celles post-bac. Ça ne se comprendra pas sans effort (c'est la mauvaise nouvelle), mais avec des efforts ça se comprend (ce qui est une deuxième mauvaise nouvelle pour certains, puisque ça voudra dire qu'ils n'ont pas fait d'effort !).

En fait, on peut montrer que cette somme s'écrit $P(n)$ où P est un polynôme de degré 1000 et de coefficient dominant $\frac{1}{1000}$: ceux qui ont vu passer les polynômes de Newton ont peut-être 5 neurones qui clignotent en ce moment !

12) Pour $T_n = \sum_{k=1}^n k^2 e^k$ on peut mettre en place les différentes méthodes vues dans ce DM :

- Une comparaison somme-intégrale nous dit que $T_n = \Theta(n^2 e^n)$.
- Une transformation d'Abel nous donne après calculs :

$$T_n = n^2 V_n - \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) V_i$$

On a d'une part $n^2 V_n \sim \frac{e}{e-1} n^2 e^n$ donc $n^2 V_n = \frac{e}{e-1} n^2 e^n + o(n^2 e^n)$, d'autre part $\sum_{i=0}^{n-1} V_i = O(e^n) = o(n^2 e^n)$ et enfin $0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} i V_i \leq n \sum_{i=0}^{n-1} V_i = O(n e^n) = o(n^2 e^n)$ et donc :

$$\boxed{T_n = \frac{e}{e-1} n^2 e^n + o(n^2 e^n) \text{ donc } T_n \sim \frac{e}{e-1} n^2 e^n}$$

- Enfin, si on reprend la fonction auxiliaire f vue plus haut, on a $f''(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc : $f''(e) = \frac{T_n}{e^2} - \frac{S_n}{e}$ puis :

$$T_n = e^2 f''(e) + e S_n = \dots = \frac{e}{e-1} n^2 e^n + O(n e^n)$$

et ainsi :

$$\boxed{T_n \sim \frac{e}{e-1} n^2 e^n}$$