



À rendre le mardi 22 septembre 2026 dernier délai.

On s'intéresse dans ce problème à l'estimation lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k e^k$$

Comparaison somme-intégrale

On note ici f l'application $x \mapsto x e^x$.

- 1) **Expliquer** SUR UN DESSIN pourquoi on peut encadrer $f(k)$ (avec $k \geq 1$) entre deux intégrales (qu'on ne demande pas de calculer !)
- 2) **Prouver** l'encadrement précédent, puis encadrer, pour $n \geq 1$, S_n à l'aide de deux intégrales.
- 3) Calculer ces deux intégrales puis en déduire :

$$S_n = O(ne^n) \quad \text{et} \quad ne^n = O(S_n)$$

Ce qui se note parfois (mais pas par vous, par pitié !) : $S_n = \Theta(ne^n)$. Au passage, ceux qui ne savent pas écrire un « grand O » et le confondent avec un espèce de Θ qui n'en n'est pas un, mais qui n'est pas non plus un grand O ... ceux-là sont priés d'apprendre vite à écrire les grands O (qui ne sont pas des O moyens qui ne s'assureraient pas tout à fait, pour on ne sait quelle raison).

Transformation d'Abel

Le calcul précédent et/ou l'expérience conduisent à envisager de faire une transformation d'Abel, c'est-à-dire poser (pour $n \in \mathbb{N}$) $V_n = \sum_{k=0}^n e^k$, de sorte que $e^n = V_n - V_{n-1}$, puis injecter cette relation dans la somme initiale.

- 4) Réaliser effectivement cette opération, en cassant ainsi S_n en deux sommes, en réindexant la deuxième, puis en les regroupant.
- 5) Donner la valeur puis un équivalent simple de V_n . Donner enfin un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n-1} V_k$.
- 6) En déduire un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers $+\infty$. Vérifier la cohérence avec l'encadrement de la première partie.

Quand on écrit $\int_a^b f g = \int_a^b f G'$ (ce qui revient à chercher puis trouver une fonction G (qui n'était pas donnée) telle que $G' = g$), ça s'appelle une intégration par parties, et le résultat fait intervenir fG pris entre a et b , ainsi qu'une intégrale de $f'G$.

Quand on écrit $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^n u_k (V_k - V_{k-1})$ cela s'appelle donc une transformation d'Abel, et le résultat fait intervenir la suite $(u_k V_k)_k$ en $k = n$ et $k = 1$, ainsi qu'une somme de $(u_k - u_{k-1})V_k$. Ça ressemble, non ?

Intervention de somme

- 7) Réaliser « de façon convaincante » l'intervention des sommes dans une expression telle que

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k u_{k,i} \right)$$

Par « de façon convaincante » j'entends : donner le résultat en expliquant vaguement comment vous le comprenez/retrouvez ; si possible pas « j'ai appris par cœur ce changement d'indice incompréhensible ».

- 8) Notant que $k = \sum_{i=1}^k 1$, calculer S_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$.

Utilisation d'une fonction auxiliaire

Notons, à $n \geq 1$ fixé, f l'application définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

- 9) Exprimer S_n à l'aide de f ... Ou de sa dérivée !
10) En déduire la valeur de S_n puis en donner un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$.

Same player shoot again

- 11) Que dire de $\sum_{k=1}^n k^{999}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
12) Que dire de $\sum_{k=1}^n k^2 e^k$ lorsque n tend vers $+\infty$?

The more you give, the more you get.