



Suites et séries numériques

1 Suites réelles

1.1 Convergences

Exercice 1 – Mines PSI 2024 [7/10]

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et, pour $n \geq 1$, $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$

1. Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque la suite (x_n) est constante.
2. Étudier la convergence de la suite (y_n) lorsque $x_n = a b^{2^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
3. Montrer que la suite (y_n) converge si et seulement si la suite $(x_n^{1/2^n})$ est bornée.

Exercice 2 – Mines 2022 [5/10] - Anna B.

On considère la suite (u_n) donnée par la condition initiale $u_0 = a$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que s'il existe a tel que (u_n) converge, alors c'est le cas pour tout a .
2. Dans le cas $a = 1$, calculer u_n , puis montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.

Exercice 3 – Centrale 2010 [7/10]

Déterminer la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de $\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 4 – $u_{n+1} = f(u_n)$ [5/10]

Étudier, en fonction de la valeur u_0 , le comportement des suites (u_n) vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f : x \mapsto 1 + x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{2}$.

Exercice 5 – Récurrence linéaire d'ordre 2 [3/10]

Déterminer les suites $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $g_{n+2} = 999g_{n+1} - g_n$ et qui sont bornées.

Exercice 6 – Centrale 2024 [9/10] - Léane F.

J'ai enrichi l'exercice posé. La fin est difficile mais le début permet d'aider aux questions suivantes. Sans les deux dernières questions, cet exercice est noté 7/10 en difficulté.

On définit, pour $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite $(u_n(a))_{n \geq 1}$ par $u_1(a) = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}(a) = u_n(a)^2 + \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que si $(u_n(a))_{n \geq 1}$ possède une limite, alors celle-ci vaut forcément 0, 1 ou $+\infty$.
Dans la suite, on note E_ℓ l'ensemble des $a \geq 0$ tels que $u_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
2. (a) Montrer que s'il existe $n_0 > 0$ tel que $u_{n_0}(a) > 1$ alors $u_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
(b) Montrer que si $a < b$ alors pour tout $n > 0$ on a $u_n(a) < u_n(b)$.
(c) Montrer que s'il existe n_0 tel que $u_{n_0+1}(a) < u_{n_0}(a)$, alors $(u_n(a))_{n \geq n_0}$ est décroissante.

3. On admet dans la suite que $u_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (a) Montrer que E_0 , E_1 et $E_{+\infty}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}_+$.
 - (b) Montrer que $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty} = \mathbb{R}_+$.
 - (c) [Plus difficile] Montrer que $E_{+\infty}$ est ouvert et contient 1.
 - (d) [Beaucoup plus difficile] Montrer que E_0 est de la forme $[0, \alpha[$.
 - (e) [Vraiment difficile à mon avis] Montrer que E_1 est un singleton.

1.2 Comportements asymptotiques

Exercice 7 – CCINP 2015 [8/10]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1 \quad (E_n)$$

1. Montrer qu'il existe un unique u_n solution de (E_n) sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ .
3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Exercice 8 – TPE 2015 et 2018 [6/10]

On considère une suite (u_n) de premier terme $u_0 > 0$ et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$. En considérant $v_{n+1} - v_n$, montrer la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 9 – Une asymptote [4/10]

Montrer que le graphe de l'application $x \neq 0 \mapsto (x+5)e^{-1/x}$ possède une asymptote. Donner les positions relatives du graphe et de son asymptote.

Exercice 10 – Un équivalent pour une suite hypergéométrique [6/10]

Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n k^k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Séries à termes positifs

2.1 Des convergences ; cas concrets

Exercice 11 – Mines PSI 2024 [7/10]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par $u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
2. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 12 – CCINP [5/10]

Nature des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ et $v_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$.

Exercice 13 – TPE 2015 [6/10]

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{sinon} \end{cases}$

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 14 – *Séries de Bertrand ; frontière du cours [5/10]*

Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.
2. Donner un équivalent des sommes partielles lorsque $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.
3. Soit $\gamma > 0$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^\alpha}$ est-elle convergente ?

2.2 Des convergences : situations plus théoriques

Exercice 15 – *Classique mais délicat : X 2011, mais aussi Centrale, Mines, CCINP... [8/10]*

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ une série convergente de réels positifs, avec (a_n) décroissante. Montrer : $a_n = o(1/n)$.

Exercice 16 – *CCINP 2015 [3/10]*

Pour $\alpha > 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer : $R_n \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}$.
2. Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 17 – *Centrale 2017 [7/10]*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On souhaite étudier la propriété : $u_n \sim \frac{1}{n}$ si et seulement si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$.

1. Montrer l'implication directe.
2. On suppose (u_n) monotone. Montrer alors l'équivalence.
3. Sans l'hypothèse de monotonie, le résultat est-il vrai ?

2.3 Calculs de somme

Exercice 18 – *Colle 2023-2024 [7/10]*

On définit $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k}$ pour $n \geq 2$.

1. Encadrer u_n puis en donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$.
2. On définit $v_n = u_n - \frac{\ln^2 n}{2}$. Étudier la monotonie puis la convergence de (v_n) .
3. Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 19 – *Ce sera plus facile dans quelques semaines [5/10]*

Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

N'y aurait-il pas lieu de faire intervenir $f_N : x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$? La quantité $f'_N(1/2)$ doit être intéressante...

Exercice 20 – *St Cyr 2009 [2/10]*

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$.

3 Séries alternées

Exercice 21 – CCINP PSI 2024 [3/10]

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées.
2. Étudier la nature de la série $\sum \cos(\pi n^2 \ln(1 + 1/n))$.

Exercice 22 – CCINP [6/10]

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 23 – CCINP [6/10]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ln n + (-1)^n n^\alpha}$ est-elle convergente ?

4 Quelques derniers pour la route

Exercice 24 – Mines (et autres) depuis 1985 [6/10/]

1. Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
2. Montrer : $(n+1)!R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
3. En déduire la nature de la série de terme général $\sin(2\pi en!)$.

Exercice 25 – CCP 2016 [5/10]

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}e^{u_{n+1}} = \frac{u_n}{2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle est unique.
2. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge.
4. À l'aide de la série de terme général $\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n)$, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $u_n \sim \frac{c}{2^n}$.

Exercice 26 – Mines 2017 [9/10]

Calculer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 – CCINP 2018 [2/10]

Montrer que $\sum (\ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n))$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 28 – Centrale 2015 [4/10]

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle nécessairement ?
2. Montrer que la suite de terme général $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ est convergente.

Exercice 29 – Contre-exemple de Cauchy [6/10]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Que dire des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ ainsi que de leur produit de Cauchy $\sum w_n = \sum u_n \sum v_n$?

5 Posés en colle

Exercice 30 – C. Stérin 2023-2024 [7/10]

On suppose que $u_0 \in]0, 1[$, et : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Établir la convergence de (u_n) .
2. Donner la nature des séries $\sum u_n^2$ et $\sum \ln(1 - u_n)$.
3. $\sum u_n$ est-elle convergente ?
4. Montrer que $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ converge, puis donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On pourra utiliser pour la dernière question le lemme de Cesaro : si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Exercice 31 – B. Saleur 2023-2024 [4/10]

Nature et somme de $\sum 3^n \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{n+1}}\right)$.

Exercice 32 – B. Saleur 2023-2024 [4/10]

Nature de $\sum \sin \sqrt{1 + n^2 \pi^2}$.

Exercice 33 – L. Mermet 2023/2024 [8/10]

Soit $a > 0$. Donner la nature de

$$\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{1}{2n^{2a}} \right)$$

6 Des indications

Exercice 1 – $y_{n+1} = \sqrt{K + y_n}$ étudiée de façon classique (souvent n'importe comment : vous pouvez donc vous démarquer !). Si $x_n = a b^{2^n}$, alors $y_n = b y'_n$ où (y'_n) nous ramène à la question précédente. Si $x_n^{1/2^n} \leq K$ alors par récurrence immédiate $y_n \leq y'_n$ ou (y'_n) est associée à la suite constante $x'_n = K$; (y_n) est donc bornée. Et comme (y_n) est croissante... Réciproquement si (y_n) est convergente alors elle est bornée. Or $y_n \geq \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{x_n}}} = x_n^{1/2^n}$.

Exercice 2 – Je trouve l'exercice bizarrement posé, mais bon... Si on note (u_n) et (v_n) les suites associées aux conditions initiales $u_0 = a$ et $v_0 = b$, alors $u_{n+1} - v_{n+1}$ s'exprime assez bien à l'aide de $u_n - v_n$... À un moment ou un autre, on peut remarquer que $(n+1)!u_{n+1} = n!u_n + (n+1)!$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!u_n = 0!u_0 + 1! + 2! + \dots + n!$, puis (dans le cas $u_0 = 1$:

$$u_n = \frac{1}{n!} (n! + (n-1)! + \dots + 1!).$$

Il reste à montrer que la somme de factorielle est équivalente à son premier terme (et donc que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$), en majorant $(n-1)! + (n-2)! + \dots + 1! + 0!$ par non pas $(n-1) \times (n-1)!$ mais par $(n-1)! + (n-2) \times (n-2)!$.

Exercice 3 – Le terme étudié est de la forme $u_n = v_n^{w_n} = \exp(w_n \ln u_n)$ (avec (v_n) et (w_n) de limites non évidentes !); on va donc chercher un équivalent d'une part de w_n et d'autre part de $\ln(u_n)$. C'est parti !

$$w_n = \sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n^2 - 1} = n \left(\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \right) = n \left((1-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

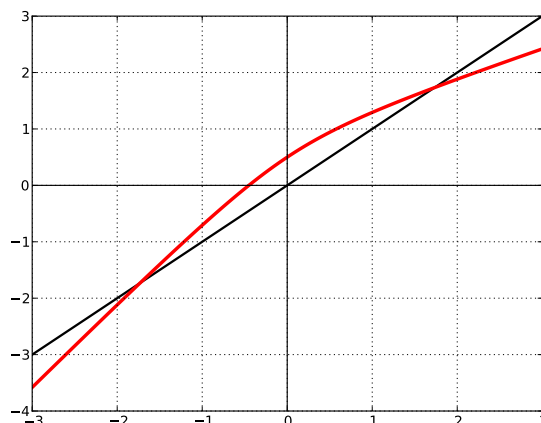
donc $w_n \sim \frac{1}{2n}$. Ensuite on a repéré dans v_n une sous-expression qui converge vers e grâce au développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$ et comme ce terme principal va disparaître, il est raisonnable de prendre

un terme de plus :

$$\begin{aligned} v_n &= e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o(1/n)}\right) = e\left(\frac{1}{2n} + o(1/n)\right) = \frac{e}{2n}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

donc $\ln v_n = 1 - \ln(2n) + o(1) \sim -\ln(2n)$ puis $w_n \ln(v_n) \sim -\frac{\ln 2n}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0...$

Exercice 4 – On commence par une étude rapide pour obtenir le graphe de la fonction en jeu...



Il y a donc 3 situations génériques à traiter en plus des deux cas particuliers.

Exercice 5 – Sans les calculer, je sais que exactement une des deux racines de $X^2 - 999X + 1$ est de module majoré par 1...

Exercice 6 – Si $u_{n_0} > 1$, alors à partir du rang n_0 la suite sera croissante et minorée par $u_{n_0}(a)$. Le deuxième point se montre par récurrence, et le troisième est conséquence des deux premiers. Ensuite : si $a \in E_0$ alors il existe n_0 tel que $u_{n_0+1}(a) < u_{n_0}(a)$ (sans quoi...). Mais $a \mapsto u_{n_0+1}(a) - u_{n_0}(a)$ est continue, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_{n_0+1}(b) < u_{n_0}(b)$ pour tout $b \in [a, a + \varepsilon]$: de tels b sont alors dans E_0 . Pour la dernière question, voici un très bel argument : d'après ce qui précède, $E_0 = [0, \alpha[$ et $E_{+\infty} =]\beta, +\infty[$. On a alors $E_1 = [\alpha, \beta]$. Mais si on avait $\alpha < \beta$, alors la suite de fonctions (u_n) convergerait vers une fonction plateau, ce qui n'est pas possible car les u_n sont convexes sur $[0, \beta]$. Joli, non ?

Exercice 7 – L'application $f_n : x \mapsto x + x^2 + \dots + x^n$ est continue strictement croissante, de limite connue en $+\infty$; bijection, gnagna. On a même $f_n(u_n) = 1 < n = f_n(1)$ donc $u_n < 1$. De même, $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = f_{n+1}(u_{n+1})$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis convergente vers $\ell \in [0, u_0] \subset [0, 1[$. Puisque (somme d'une suite géométrique) $|1 - 2u_n| = |-u_n^{n+1}| \leq u_0^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. En écrivant $u_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$, on a alors $\varepsilon_n = u_n^{n+1}/2 = \frac{1}{2^{n+2}}(1 + 2\varepsilon_n)^{n+1}$, or $n\varepsilon_n = O(nu_0^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc en écrivant $(1 + 2\varepsilon_n)^{n+1}$ sous forme exponentielle, on obtient finalement : $u_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2^{n+2}}$.

Exercice 8 – Un petit dessin avec le graphe précis de $x \mapsto x + x^2$ sur $[-1, 3]$ tout d'abord... puis on montre ce qu'on voit : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et si elle convergerait disons vers ℓ , alors on aurait $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = -1$, or $\ell \geq u_0 > 0$: c'est absurde, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ensuite, $v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{2^{n+1}u_n} = o(1/2^n)$, etc.

Exercice 9 – `> asympt((x+5)*exp(-1/x), x, 2);`

$$x + 4 - \frac{9}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 10 – Pour montrer que la somme S_n est équivalente à son dernier terme, on majore $S_n - n^n$ par $(n-2) \times (n-2)^{n-2} + (n-1)^{n-1} \dots$

Exercice 11 – Pour la première question : (u_n) est majorée par $u_1 + \zeta(2)$ puis $u_n = O(1/n)$. Ensuite, je me suis demandé si on ne pouvait pas montrer une majoration du type $u_n \leq \frac{K}{n^2}$. Ce n'est certainement pas le cas en prenant K quelconque : il faut déjà avoir $K \geq u_1$. Pour que l'inégalité passe à la récurrence, on a besoin (sauf erreur) de $n^3 + 2n^2 + 1 \leq K(n^3 - n^2 - 2n - 1)$: c'est certainement possible en prenant K plus grand qu'un majorant d'une suite qui converge vers 1...
Bon, en fait c'est bien plus simple que ça ! Le $O(1)$ (qui était certes non gratuit) devient $O(1/n)$ puis $O(1/n^2) \dots$ et même $\sim 1/n^2$!

Exercice 12 – $n^{1/n} = e^{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $v_n = \frac{n}{(\ln n)^{n-1}} = \exp(\dots) \dots$

Exercice 13 – Pour la classe $\mathcal{C}^1$, attention à ne pas dire n'importe quoi si vous utilisez le théorème de la limite de la dérivée ! $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien entendu (dessin, et étapes usuelles) décroissante vers 0. Ensuite, $f(x) \leq \frac{x}{2}$ (par exemple) pour x assez proche de 0^+ , puis $u_n = O(1/2^n) \dots$
Nécessitait un peu d'initiative dans les majorations, même si celles-ci pouvaient être assez grossières ; bon exercice d'oral !

Exercice 14 – Comparaisons somme/intégrale (dans le cas $\alpha = 1$), encore et toujours. Pour $\alpha \neq 1$ on peut comparer à des $\frac{1}{n^\beta}$ avec β entre 1 et α .

Exercice 15 – On a par exemple :

$$na_{2n} \leq \sum_{k=n}^{2n} a_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 16 – Pour le premier point, c'est du cours (comparaisons soigneuses somme/intégrale). Et puisque $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$, la deuxième question n'est pas très difficile !

Exercice 17 – Pour le sens direct je passerais bien par un développement limité. Dans le cas monotone (donc décroissant vers 0 ; pourquoi ?) j'écrirais bien $u_n + u_{n+1} \leq u_n \leq u_n + u_{n-1}$ avant de multiplier par $\sqrt{n}$ puis gendarmiser. Pour le contre-exemple (ben oui...) j'ai bricolé : $u_{2p} = \frac{1}{4p}$ et $u_{2p+1} = \frac{3}{4p}$; ça doit marcher...

Exercice 18 – Une comparaison somme-intégrale standard donne un encadrement suffisamment fin pour avoir à la fois $u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$ et la bornitude de (v_n) ; quant à la monotonie, pas envie de faire le calcul mais « ça doit bien se faire » (il y a des $o(\dots)$ hétérogènes, donc attention quand même). Pour la dernière question, la série est bien entendue convergente (série alternée dont la valeur absolue du terme général blablabla). Si on note S_n ce qu'on imagine, alors à mon avis on peut exprimer S_{2n+1} à l'aide de u_{2n+1} et u_{2n} , et on utilise alors le développement asymptotique $u_n = \frac{\ln^2 n}{2} + \ell + o(1)$ (je n'ai pas fait le calcul mais ça doit marcher comme pour l'existence de la constante d'Euler, non ?).

Exercice 19 – `> sum(n/2**n,n=0..infinity);`

2

`> limit(subs(x=1/2,x*diff(sum(x**n,n=0..N),x)),N=infinity);`

2

Exercice 20 – Décomposition en éléments simples. On voudra bien trouver $\frac{1}{2}$.

Exercice 21 – Il me semble que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$.

Exercice 22 – Collisionner après une décomposition en éléments simples.

> sum((-1)**n/(n*(n-1)),n=2..infinity);

$$-1 + 2 \ln 2$$

Exercice 23 – Pour $\alpha \in]0, 1]$, on écrit : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right) \dots$

Exercice 24 – La majoration de $(n+1)!R_n - 1$ demande un peu d'initiative. On peut par exemple majorer $\frac{(n+1)!}{k!}$ par $\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}$ pour $k \geq n+2$. Pour la dernière question, il s'agit de noter que d'une part $n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est entier, et que d'autre part $e - R_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 25 – Je n'aime pas trop (pas du tout !) la façon dont c'est posé, mais... bon, $\varphi : x \mapsto xe^x$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans lui-même (on ouvre pour la suite...). Puisque $\varphi(x) \geq x$ on obtient la décroissance de (u_n) puis sa convergence... vers 0. Ensuite, $u_{n+1} = u_n \frac{e^{-u_{n+1}}}{2} \leq \frac{u_n}{2}$ puis $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$. Enfin, $v_n = \ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = -u_{n+1}$ est le terme général d'une série convergente, donc $(\ln(2^n u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 26 – Pour n pair (impossible de ne pas distinguer les deux cas !) :

$$S_n = S_{2p} = \sum_{k=1}^p \left(\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} \right) = \sum_{k=1}^p \underbrace{\sqrt{2k} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} + o(1/k) \right) \right)}_{\alpha_k}$$

avec $\alpha_k \sim \beta_k = \sqrt{\frac{2}{k}}$. S'il est facile (comparaison somme/intégrale) d'obtenir un équivalent simple de $\sum_{k=1}^p \beta_k$, le passage à $\sum_{k=1}^p \alpha_k$ nécessite d'utiliser un théorème hors-programme... ou bien d'affiner l'équivalent : $\alpha_k = \beta_k + \gamma_k$, avec $\sum \gamma_k$ qui converge.

Exercice 27 – $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} \right) = \frac{(-1)^n}{2n} + O(1/n^2) \dots$

Exercice 28 – La suite $(\ln b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut ne pas converger pour plein de raisons (bien que $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$). Prenons par exemple $a_k = \frac{1}{k}$ (on peut même calculer b_n dans ce cas). Prendre le logarithme reste une bonne idée pour la deuxième question.

Exercice 29 – Le produit de Cauchy $\sum w_n = \sum u_n \sum v_n$ vérifie pour $n \geq 1$: $w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. Or pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ (tracer une jolie parabole), donc $|w_n| \geq \frac{n-1}{n\sqrt{2}}$ donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Exercice 30 – Exceptionnellement il peut être intéressant de privilégier l'intervalle stable ouvert $]0, 1[$ (comme ça on obtient le fait que tous les u_n sont non nuls) pour obtenir : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ensuite c'est assez routinier. La série $\sum u_n^2 = \sum (u_n - u_{n+1})$ a le même comportement que la suite (u_n) donc converge, puis (c'est sioux !) $\ln(1 - u_n) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \dots$ Ensuite $\ln(1 - u_n) = -u_n + O(u_n^2)$ donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \ln(1 - u_n)$: elle est divergente. Enfin $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on peut conclure avec de la sommation d'équivalent/Cesaro : $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 31 – $O(1/9^n)$ pour la convergence. Partie imaginaire d'un truc qu'on sait sommer, après linéarisation de $\sin^3 \varphi$.

Exercice 32 – Je trouve $u_n = (-1)^n \sin \left(\frac{1}{2n\pi} + O(1/n^2) \right) \dots$

Exercice 33 – Très bien pour apprendre à travailler à différents ordres sans être devin : pour $a > 1$, convergence absolue avec $\ln(1+u) \sim u$. Pour $a > 1/2$, $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, etc jusqu'à l'ordre 4!

