



Algèbre linéaire - rappels et compléments

1 Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1 – Mines PSI 2024 [6/10]

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p de rang r dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\Psi(X) = PX - XP$.

Exercice 2 – Mines PSI 2024 [7/10]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Exercice 3 – CCINP PSI 2024 [3/10]

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^n = 0$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k (X + k)^p = 0$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{k=0}^n \alpha_k k^p = 0$. Conclure.

Exercice 4 – Mines 2016 [6/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; AM = MA\}$.

Exercice 5 – CCINP 2018 [5/10]

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $\varphi(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Étudier la surjectivité de φ .

Exercice 6 – À savoir faire les yeux bandés ; CCINP 2016 [2/10]

Soit E un espace vectoriel. Déterminer les endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

On pourra, dans un premier temps, supposer E de dimension finie et travailler dans une base.

Exercice 7 – Mines 2010 (MP) [3/10]

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace de E si et seulement si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Exercice 8 – CCINP 2008 (MP) [5/10]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.
3. Montrer que $E = \text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 9 – CCINP 2007 [4/10]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$, alors $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
2. Montrer que si $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$, alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Exercice 10 – Mines 2010 (PC) [7/10]

Soient E un espace vectoriel de dimension n , f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f+g = \text{Id}_E$, avec $\text{rg}(f)+\text{rg}(g) \leq n$. Montrer que $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$, puis que f et g sont des projecteurs.

Exercice 11 – CCINP 2015 [7/10]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace de dimension finie $n \geq 2$. On suppose f nilpotente d'ordre n .

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
2. Que vaut $\text{Mat}(f, \mathcal{B})$?
3. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si $g \in \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice 12 – Centrale 2015 [7/10]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, ainsi que $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est un entier pair.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13 – ENSAM 2017 [5/10]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \text{tr}(M)I_n.$$

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que f possède un polynôme annulateur de degré 2 ; en déduire f^{-1} .

Exercice 14 – Mines 2017 [8/10]

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que cette famille est libre si et seulement s'il existe n réels $x_1, \dots, x_n$ tels que la matrice (n, n) de terme général $f_i(x_j)$ est inversible.

Exercice 15 – X 2016 PC [3/10]

Soient E et F deux espaces de dimension finie, $x \in E$ et $y \in F$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u(x) = y$.

2 Polynômes, fractions rationnelles

Exercice 16 – Mines 2016 [7/10]

Trouver le polynôme de degré minimal qui, divisé par $X^2 + X + 1$, donne $X - 1/2$ pour reste et, divisé par $X^2 - X + 1$, donne $2 - X$ pour reste.

Exercice 17 – St-Cyr 2017 [4/10]

Soit $P = X^3 + X + 1$. On note α, β, γ les racines complexes de P .

1. Calculer $s_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $s_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $s_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
2. En exploitant la division euclidienne de X^4 par P , calculer $s_4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$.

Exercice 18 – *ENSEA 2023 [3/10] - Zacharie S.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer de deux façons différentes que $X^2 - X + 1$ divise $X^{2n} - (X - 1)^n$.

Exercice 19 – *Relations coefficients-racines [7/10]*

Factoriser $(X + i)^{2m+1} - (X - i)^{2m+1}$ ($m \in \mathbb{N}^*$) en produit d'irréductibles.

En déduire une expression de $\prod_{k=1}^m \cotan \frac{k\pi}{2m+1}$.

Exercice 20 – *Polynômes de Tchebychev [7/10]*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n, U_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$ et $\sin((n+1)\theta) = \sin \theta U_n(\cos \theta)$. Montrer que ces polynômes sont (à n fixé!) uniques.
2. Donner les premiers T_n et U_n , ainsi que le terme dominant de T_n et U_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Factoriser T_n et U_n en produit d'irréductibles.

Exercice 21 – *TPE 2015 [3/10]*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q - XR$, avec Q et R le quotient et le reste de $P(X^2)$ par $A_n = 1 + X + \dots + X^n$.

1. Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de Φ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 22 – *Centrale 2013 [6/10]*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est nilpotent.
2. En déduire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j) = 0.$$

3 Calcul matriciel

Exercice 23 – *Rang par bloc [4/10]*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.

Déterminer le rang de C en fonction de $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$.

Exercice 24 – *CCINP 2012 (MP) [4/10]*

Soit $B = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^n .
2. Soient (u_n) et (v_n) vérifiant $\begin{cases} u_{n+1} = -16u_n - 28v_n \\ v_{n+1} = 6u_n + 10v_n \end{cases}$
Exprimer u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0 .

Exercice 25 – *Mines 2010 (PC) [4/10]*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Exercice 26 – *TPE 2016 [6/10]*

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

1. (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel. Donner sa dimension.
 (b) Montrer que $\mathcal{T}$ est stable par produit.
2. Soit $T \in \mathcal{T}$ inversible.
 (a) Montrer que $\psi : M \mapsto MT$ est un endomorphisme de $\mathcal{T}$.
 (b) Caractériser le noyau de ψ et donner le rang de ψ .
 (c) Justifier que $T^{-1} \in \mathcal{T}$.

Exercice 27 – *Télécom sud Paris 2012 [5/10]*

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de
$$\begin{pmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{pmatrix} \quad (0)$$

Exercice 28 – *Mines 2010 [6/10]*

Soit $A = \text{Diag}(1, 2, 1)$. Calculer le déterminant de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto AM + MA$.

Exercice 29 – *Mines 2017 [5/10]*

On définit, pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & x & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est dérivable, et calculer D'_n .
2. En déduire la valeur de D_n .

4 Quelques calculs effectifs

Exercice 30 – *Rangs [4/10]*

Donner le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31 – *Inverses [4/10]*

Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32 – *Un peu de complexité [4/10]*

Évaluer la complexité des différents pivots pour les algorithmes mis en œuvre dans les exercices précédents.

Il s'agit d'évaluer (à la louche) le nombre de sommes/produits effectués dans le cas de matrices (n, n) (on se fiche des constantes : est-ce plutôt du 2^n , n^2 , n^4 , $n!$?)

5 Posés en colle

Exercice 33 – *L. Mermet 2023-2024 [2/10]*

1. Montrer que $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner sa dimension.
2. Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V , et calculer son déterminant.

Exercice 34 – *L. Mermet 2023-2024 [5/10]*

Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\text{Im}(q) \subset \text{Ker } p$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Déterminer l'image et le noyau de r .

Exercice 35 – *C. Stérin 2023-2024 [8/10]*

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

Montrer : $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$.

Exercice 36 – *C. Stérin 2023-2024 [6/10]*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer que l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

Exercice 37 – *P. Bel 2023/2024 [8/10]*

Soit n un entier ≥ 2 .

1. Déterminer les racines de $P_n = (X+1)^n - X^n$.
2. Que vaut $\prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$?

Exercice 38 – *C. Stérin 2023/2024 [8/10]*

Soit f endomorphisme de E (de dimension n) nilpotent d'indice n . Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\text{Ker}(u^k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice 39 – *C. Stérin 2023/2024 [4/10]*

Soient E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$. Montrer :

$$E = \text{Ker}(f - i\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + i\text{Id}_E)$$

6 Des indications (et même un peu mieux)

Exercice 1 – Raisonner d'abord sur le cas réduit où $P = J_r$, et calculer par bloc : $\Psi(E_{i,j})$ vaut 0 ou $\pm E_{i,j}$ selon les valeurs de i et j . Pour traiter le cas général, écrire $P = QJ_rQ^{-1}$ et travailler sur la base $(F_{i,j} = QE_{i,j}Q^{-1})_{i,j}$.

Exercice 2 – Commencer par le cas $A = I_n$, puis A inversible. Pour le cas général, j'approcherais A par des matrices inversibles, genre $A + \frac{1}{p}I_n \dots$

Exercice 3 – Dérivation, évaluation en 0.

Exercice 4 – On commence par montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que C_A est isomorphe à C_B donc est de même dimension. Ensuite, on montre plus ou moins élégamment que C_B est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Le fait que $\text{Ker}(B)$ et $\text{Ker}(B^2)$ soient stables par $M \in C_B$ peut déjà accélérer les calculs...

Exercice 5 – Regarder le terme dominant de $\varphi(X^n)$ pour $n \geq 2$. Pour la dernière question, considérer la restriction, à n fixé, de φ à $\mathbb{R}_{n+2}[X]$.

Exercice 6 – Il s’agit évidemment de montrer que les endomorphismes ayant cette propriété sont exactement les homothéties. Dans un sens, c’est trivial. Réciproquement, on suppose la propriété vérifiée, et en dimension finie, on peut regarder la matrice de u dans une base. Elle est d’abord diagonale (regarder $u(e_1)$), puis scalaire (regarder $u(e_1 + e_2)$). En dimension infinie, on a tout d’abord pour tout $x \neq 0$ l’existence de $\lambda(x)$ tel que $u(x) = \lambda(x)x$. Pour montrer que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x , on fixe x et y distincts, et on observe $u(x+y)$. Il y aura lieu de distinguer selon que (x, y) est libre ou non.

Exercice 7 – Pour le sens non trivial, par la contraposée : si $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$, cela nous fournit deux habitants de $E_1 \cup E_2$ dont la somme aura bien du mal à être dans E_1 comme dans E_2 .

Exercice 8 – Pour les deux premiers points, une inclusion est systématique, l’autre se faisant en composant avec f . Pour les supplémentaires, analyse/synthèse pour prouver que chaque $x \in E$ se décompose de façon unique selon $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f)$. Attention, il n’y a pas d’argument dimensionnel !

Exercice 9 – Une inclusion systématique, et l’autre... locale. Ensuite, une inclusion, et les dimensions via le théorème du rang. Bonus : donner des contre-exemples en dimension infinie.

Exercice 10 – Grassmanniser sur $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, qui contient $\text{Im}(f+g)$... puis regarder par exemple les matrices dans une base adaptée aux supplémentaires.

Exercice 11 – Ralala, si seulement on avait déjà rencontré cette situation une ou deux dizaines de fois dans le passé, ça pourrait nous aider... Pour l’inclusion non triviale du dernier point, on peut raisonner matriciellement (c’était probablement le point de vue privilégié par celui qui a posé l’exo) en calculant soigneusement les matrices FG et GF lorsque F est comme on imagine et G quelconque. Mais on peut aussi travailler par analyse-synthèse, en supposant $f \circ g = g \circ f$: si $g = \alpha_0 \text{Id}_E + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$, alors en évaluant en x_0 on voit que les α_k sont nécessairement les coordonnées de $g(x_0)$ dans une certaine base. Réciproquement...

Exercice 12 – Le déterminant de $f \circ g = -g \circ f$ impose : $(-1)^n \det f \det g = \det f \det g$, or f et g sont des symétries, donc bijectives, donc $(-1)^n = 1$, d’où la parité de n . Ensuite, si on construit une base de E en concaténant des bases de $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$, la matrice de f dans cette base est de la forme voulue, mais pas celle de g a priori. Ceci dit, un calcul par bloc nous montre (via la relation $f \circ g = -g \circ f$) que $g(E_1) \subset E_2$, et qu’il y a même égalité (injectivité et dimensions). Finalement, on peut reprendre notre base de E_1 et la concaténer avec son image par g : cela fournira une base de E qui devrait être assez favorable !

Joli exo, je trouve (à l’exception du premier argument, laid).

Exercice 13 – Il me semble que $f^2(M) = \dots = (n+2)f(M) - nM$. On regarde ensuite droit dans les yeux la relation $f^2 - (n+2)f = -n\text{Id}$, et on factorise f à gauche... Les amateurs d’endomorphismes de rang 1 auront plutôt considéré $f - \text{Id}$...

Exercice 14 – Le sens indirect est simple par la contraposée (si la famille de fonctions est liée, alors la matrice aura toujours ses lignes liées). La réciproque peut se faire par récurrence : pour le passage de n à $n+1$, on suppose $(f_1, \dots, f_{n+1})$ libre ; a fortiori, $(f_1, \dots, f_n)$ l’est, ce qui nous fournit $x_1, \dots, x_n$ comme on imagine. On observe alors droit dans les yeux la matrice des $f_i(x_j)$, pour $1 \leq i, j \leq n+1$, où on a pris $x_{n+1} = x$ (un réel qu’on fixe provisoirement). Son déterminant est de la forme $D(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f_k(x)$, avec $\alpha_{n+1} \neq 0$. S’il était toujours nul, cela signifierait que f_{n+1} est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$; etc.

Exercice 15 – Si $x = 0$, il est nécessaire et suffisant que $y = 0$; et si $x \neq 0$, alors en complétant la famille libre (x) en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$, il existe une (unique) application envoyant x sur y et les e_k sur 0...
L’équation $ax = b$, ça continue de vous faire lever les yeux au ciel ?

Exercice 16 – Analyse : si un tel polynôme existe, alors ses valeurs en j , j^2 , $-j$ et $-j^2$ sont imposées (avec j ce qu'on imagine). Synthèse : si un polynôme P prend les bonnes valeurs en ces 4 points, alors $P - (X - 1/2)$ s'annule en j et j^2 donc est divisible par $X^2 + X + 1$ (et de même pour la deuxième divisibilité).

Il reste à déterminer les polynômes prenant les 4 valeurs souhaitées. Il y a déjà celui fourni par Lagrange ; notons-le P_0 . Les autres sont exactement les polynômes de la forme $P_0 + (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)Q$, donc sont tous de degré supérieur à P_0 , et ce dernier polynôme est la réponse à l'exercice !

Bon, un volontaire pour déterminer P_0 (qui est probablement de degré 3, mais qui sait ?). Je n'ai pas envie de trop chercher : peut-être que ce n'était absolument pas demandé !

Mais peut-être qu'en réfléchissant un peu on peut l'avoir à moindre frais...

Exercice 17 – Je partirais bien de

$$X^3 + X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma = 0$$

pour trouver immédiatement $s_1 = 0$, relation dont le carré fournit ensuite $s_2 = -2$; ensuite, $s_3 = -3 - s_1 = -3$ (ben oui : $\alpha^3 = -1 - \alpha...$) puis avec $X^4 = X(X^3 + X + 1) - X^2 - X$ on trouve $s_4 = -s_2 - s_1 = 2$.

```
from numpy.polynomial import Polynomial
P = Polynomial([1, 1, 0, 1])
r = P.roots()
```

```
for k in range(5):
    print(k, sum(x**k for x in r))
"""
0 (3+0j)
1 (-3.33066907388e-16+0j)
2 (-2+0j)
3 (-3+0j)
4 (2+0j)
"""
```

Exercice 18 – D'une part $a^n - b^n = \dots$ dans tout anneau commutatif.

D'autre part les racines de $X^2 - X + 1$ se calculent facilement et se visualisent bien sur le cercle trigonométrique, de sorte qu'on voit presque immédiatement qu'elles sont racines de $X^{2n} - (X - 1)^n$.

Exercice 19 – C'est un polynôme de degré $2m$ dont on connaît les racines (attention à la résolution de $P(z) = 0...$).

Exercice 20 – Unicité à faire soigneusement (les $\cos \theta$ décrivent une infinité de valeurs, fournissant une infinité de racines à la différence de deux candidats solution). Pour l'existence : récurrence double, ou bien récurrence simple en traitant en parallèle les T_n et U_n , ou encore calcul direct via $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

Exercice 21 – $\deg(Q) \leq n$ et $\deg(R) < n$. Pas envie de calculer $\Phi_3(X^2)$ et $\Phi_3(X^3)$, mais ça ne doit pas être trop difficile !

Exercice 22 – Si $P \neq 0$, alors $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$ (on peut aussi regarder la matrice de Δ dans la base canonique). Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $\Delta^n(P) = 0$; on écrit alors $\Delta = (\Delta + \text{Id}) - \text{Id}$ et on binômise... dans $\mathcal{L}(E)$ entre endomorphismes qui commutent.

Exercice 23 – On peut raisonner sur les familles maximales de colonnes libres si on a les idées claires... ou bien effectuer des opérations sur les lignes et/ou colonnes pour amener A et B donc C sous forme échelonnée. Finalement : $\text{rg}(C) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

Exercice 24 – $B^2 = -3B - 2I_2$, donc $X^2 + 3X + 2 = (X + 2)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de $B...$

Exercice 25 – Le carré d'une matrice de rang 1 est connu...

Exercice 26 – On exhibe facilement une base constituée de $1 + 2 + \dots + n$ matrices élémentaires. Pour l'avant dernière question, je prouve l'injectivité de ψ (donc sa surjectivité!) en utilisant $M \mapsto MT^{-1}$... c'est-à-dire la dernière question!

Exercice 27 – $D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n$, et $X^2 - (a+b)X + ab$ n'est pas trop compliqué à factoriser (et pitié, pas de racine débécarré moins quatre assez : a et b sont complexes).

Exercice 28 – Pffff je regarderais éventuellement ce qui se passe sur la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$...

Exercice 29 – $(\det(C_1(x), \dots, C_n(x)))' = \det(C_1'(x), C_2(x), \dots, C_n(x)) + \dots + \det(C_1(x), \dots, C_{n-1}(x), C_n'(x))$...
Finalement, $D'_n = D_{n-1}$, puis $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 30 – 3, 2, 1, 3, 3, et pour la dernière, il faut discuter.

Exercice 31 – Les inverses respectives sont :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière n'est pas inversible!

Exercice 32 – Quand on résout un système (n, n) , il y a la mise sous forme triangulaire, constituée de n étapes. Pour chacune, on réalise n opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ (ainsi éventuellement qu'un échange de ligne en cas de pivot défaillant). Il y a de l'ordre de n opérations élémentaires par opération sur une ligne, soit finalement un coût de l'ordre de n^3 additions/multiplications dans $\mathbb{K}$ pour mettre sous forme triangulaire. La dernière phase est elle d'un coût quadratique. En gros, tous les autres algorithmes à base de pivot ont un coût cubique!

Exercice 33 – Je calculerais bien sa matrice sur une base privilégiée.

Exercice 34 – Je calculerais bien $r \circ r$ en utilisant $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, mais aussi $p \circ q = 0$ puisque $\text{Im}(q) \subset \text{Ker } p$. Ensuite, $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(r) \supset \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Ce sont en fait des égalités (les autres inclusions sont plus fines).

On pouvait aussi travailler matriciellement par bloc, dans une base adaptée à $\text{Im}(q)$, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.

Exercice 35 – C'est assez joli : il est facile de montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$, et en dimension fini on peut conclure en disant que d'une part $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(g) \leq \dim(E)$, et par symétrie $\dim(\text{Ker}(g)) + \text{rg}(f) \leq n$. En sommant les deux inégalités et grâce au théorème du rang on trouve $2n \leq 2n$, qui est en fait une égalité... donc les deux inégalités étaient en fait des égalités!

En dimension infinie, l'analyse-synthèse semble s'imposer pour décomposer $x \in E$ selon les deux sous-espaces qu'on imagine. Et de fait elle fournit une bonne candidate : $x = (x - g \circ f(x)) + g \circ f(x)$.

Exercice 36 – Dans une base adaptée la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un simple calcul montre qu'alors

que les g qui nous intéressent sont ceux dont la matrice dans cette base est de la forme $aI_3 + bN + cN^2$.

Exercice 37 – Les racines sont les $z_k = \frac{e^{-ik\pi/n}}{2i \sin(k\pi/n)}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, et leur produit connu en

regardant les coefficients de P_n fournit $\prod_{i=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 38 – Je prendrais bien le plus petit k tel que $F \subset \text{Ker}(u^k)$ (il existe...). En prenant ensuite $x_0 \in F \cap (\text{Ker}(u^k) \setminus \text{Ker}(u^{k-1}))$ on doit pouvoir trouver une famille libre de F qui a le même cardinal que $\text{Ker}(u^k)$.

Exercice 39 – Ça doit aller si on sait prouver la caractérisation des involutions comme symétries...

