

Réduction des endomorphismes... et des matrices

1 Petit rang... gros noyau

Exercice 1 – Mines 2024 [7/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer une matrice semblable à A , diagonale ou triangulaire.
2. Expliciter $C_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), AM = MA\}$.
3. Soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A . Quels sont les sous-espaces vectoriels f_A -stables de $\mathbb{C}^3$?
4. Peut-on retrouver C_A par des arguments de stabilité ?

Exercice 2 – [4/10]

Montrer en faisant le moins de calculs possible que les matrices suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – ENSAM 2018 [6/10]

On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$, et on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A .
2. Déterminer le spectre de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $A^2 = (\text{tr}(A))A$.
4. Calculer les puissances de A .
5. A et L sont-elles semblables ?
6. Discutez des conditions pour que deux matrices de rang 1 soient semblables.

Exercice 4 – CCP 2018 [6/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On définit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\text{tr}(A))M - (\text{tr}(M))A$.

1. Justifier brièvement que f est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Déterminer les sous-espaces propres de f . f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $f \circ f(M)$, et en déduire d'une seconde façon que f est diagonalisable.

Exercice 5 – Mines 2017 [4/10]

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit : $M = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \cdots & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$ Donner les éléments propres de M .

Exercice 6 – CCP 2017 [5/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$), telle que $\text{tr}(A) = \text{rg}(A) = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A .
2. A est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 7 – TPE 2017 [2/10]

Soit $n \geq 2$. On définit $A = \begin{pmatrix} 4 & & & (1) \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. $A - 3I_n$ est-elle inversible ?
3. Donner les éléments propres de A .

Exercice 8 – CCP 2017 [7/10]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit par bloc $A_{n+1} = \begin{pmatrix} J_n & (0) \\ (0) & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1.

1. Justifier que A_{n+1} est diagonalisable.
2. Diagonaliser J_n .
3. Connaissant un vecteur propre de J_n , comment construire un vecteur propre de A_{n+1} ?
4. Diagonaliser A_{n+1} .

2 Exemples numériques

Exercice 9 – IMT 2017 [6/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit X une matrice telle que $X^2 = A$. Montrer que X et A commutent, puis que X est triangulaire supérieure.
2. Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = A$.

Exercice 10 – Mines 2024 [4/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -14 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X+1)^2(X+2)Q_n(X) + \alpha_n(X+2) + \beta_n(X+1)(X+2) + \gamma_n(X+1)^2$.
3. Déterminer A^n .

Exercice 11 – IMT PSI 2024 [4/10]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose A diagonalisable. Diagonaliser la matrice B .

Exercice 12 – CCINP 2018 [6/10]

On définit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
2. Trouver un vecteur appartenant à $\text{Ker}(f^2)$ mais pas à $\text{Ker}(f)$.
3. Expliciter une base de E dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. (a) On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie : $g^2 = f$. Montrer que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g .
(b) Trouver l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g^2 = f$.

Exercice 13 – CCINP 2022 [5/10]

On note $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' &= -2x - 2y \\ y' &= 2x + 3y \\ z' &= x + 3z \end{cases}$

Exercice 14 – CCINP 2017 [5/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de A .
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Expliciter une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que u et v soient des vecteurs propres de A .
4. A est-elle trigonalisable ?

Exercice 15 – IMT 2016 [4/10]

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A et B sont-elles semblables ?
3. Calculer A^n .

Exercice 16 – CCINP 2015, 2016 (deux fois) ; mais posé à l'oral en 2014 aussi... [3/10]

On définit f par :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de f .
3. f est-elle diagonalisable ? inversible ?

Il y a aussi la version :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 17 – CCINP 2016 [3/10]

On considère dans cet exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A ; en déduire son spectre.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A .
3. Expliciter P tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut la matrice de f dans cette base ?
5. Calculer P^{-1} et vérifier la valeur de $P^{-1}AP$.
6. À l'aide de A^2 , A et I_3 , déterminer A^{-1} .

Exercice 18 – Mines 2010 [3/10]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C$. La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 – Mines 2015 [3/10]

Déterminer $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Mais aussi...

Exercice 20 – Mines PC 2024 [9/10]

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A . Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

Voici comment on pourrait poser plus raisonnablement cet exercice :

Exercice 21 – Wherever whenever [7/10]

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A .

1. On suppose que A n'est pas de la forme λI_n . Montrer que A est semblable à une matrice dont la première colonne est non nulle mais possède 0 en position $(1, 1)$.
2. Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

Exercice 22 – Centrale 2016 [6/10]

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et C l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrer que C est un espace vectoriel.
2. On suppose que f possède trois valeurs propres distinctes. Déterminer la dimension de C .
3. On suppose que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Déterminer la dimension de C .
4. Trouver f tel que C soit de dimension 5.

Exercice 23 – TPE 2016 [7/10]

1. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice $Q = \begin{pmatrix} P & P \\ -P & P \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres positives distinctes. Donner le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. La matrice B est-elle diagonalisable ?
3. Soient $E_n = \text{Diag}(1, 2, \dots, n)$ et $K_n = \begin{pmatrix} (n+1)I_n & E_n \\ E_n & (n+1)I_n \end{pmatrix}$. Calculer $\det(K_n)$.

Exercice 24 – CCINP 2022 [5/10]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont des racines de P .
2. Montrer que $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.
4. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 25 – CCINP 2017 [6/10]

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 4M^2 - 4M = 0$, avec $\text{tr}(M) = 0$.

Exercice 26 – Mines 2017 [5/10]

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, puis u un isomorphisme de E tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 27 – CCINP 2016 [2/10]

La matrice $\begin{pmatrix} 2+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 28 – Mines-Télécom 2016 [3/10]

On considère l'application transposition :

$$u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^T$$

1. u est-elle inversible ?
2. u est-elle diagonalisable ?
3. Donner le déterminant et la trace de u .

Exercice 29 – Mines 2010 (PC) [7/10]

Soient $n \geq 2$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Penser en termes d'indice de nilpotence.

Exercice 30 – [3/10]

Soient $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $d \geq 2$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^d l'est.

Exercice 31 – Mines 2012 [6/10]

Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} & & 1 \\ (0) & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 32 – Mines 2012 [6/10]

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(A) = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Même question avec l'équation $Q(B) = A$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 33 – Mines 2018 [8/10]

E est ici un espace vectoriel de dimension finie.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
 - Montrer : $\det(\text{Id} + u) = 1$.
 - Soit $v \in \text{GL}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer : $\det(v + u) = \det(v)$.
- On suppose : $f = d + n$ avec $d \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, et $d \circ n = n \circ d$. Montrer que f et d ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.

Exercice 34 – Centrale 2018 [7/10]

Soit $n \geq 2$, et A une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \times \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'équation $B^2 = A$.

- Résoudre cette équation lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Dans le cas général, discuter le nombre de solutions.

4 Posés en colle

Exercice 35 – P. Bel 2023-2024 [5/10]

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Étudier la diagonalisabilité de $M = ((a_i a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 36 – L. Mermet 2023-2024 [6/10]

Pour quels $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Lorsqu'elle ne l'est pas, est-elle trigonalisable ?

Exercice 37 – C. Stérin 2023-2024 [6/10]

Soit φ une forme linéaire non nulle sur E . On définit $f : x \in E \mapsto \varphi(a)x - \varphi(x)a$.

- Montrer que f est linéaire.
- Déterminer le rang de f .
- f est-il diagonalisable ?

Exercice 38 – L. Mermet 2023-2024 [6/10]

Déterminer le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de $M^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 39 – P. Bel 2023-2024 [7/10]

Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x' &= & & 2y &+& 2z \\ y' &= & -x &+& 2y &+& 2z \\ z' &= & -x &+& y &+& 3z \end{cases}$$

Exercice 40 – B. Saleur 2023-2024 [7/10]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.
2. Déterminer les matrices X telles que $X^2 = D$ puis celles telles que $X^3 = D$.
3. Déterminer les matrices réelles X telles que $X^2 = A$ puis celles telles que $X^3 = A$.

Exercice 41 – B. Saleur 2023-2024 [5/10]

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 42 – B. Saleur 2023-2024 [1/10]

L'application $P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P - P'$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 43 – B. Saleur 2023-2024 [6/10]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

5 Des indications

Exercice 1 – A est de rang 1, et un vecteur de base de son image (sa première colonne f_1 , au hasard), est dans son noyau. On construit alors facilement une base adaptée en prenant $f_3 = e_1$ et f_2 un habi-

tant du noyau non colinéaire à f_1 ; par exemple $\begin{pmatrix} j \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour C_A , plutôt qu'un calcul brute-force j'ai

commencé par des considérations de stabilité qui racontent que $\text{Ker}(f_A)$ et $\text{Ker}(f_A^2)$ sont stable par tout endomorphisme qui commute avec a . Finalement, C_A est fortement relié aux matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 0 & \gamma & \varepsilon \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Les droites stables par f_A sont celles engendrées par un vecteur propre, c'est-à-dire n'importe quel vecteur non nul du noyau. Pour les plans, il y a évidemment le noyau... mais ce n'est pas le seul ! Analyse : si un plan F est stable par f_A alors $f_A(F)$, qui vaut $\{0\}$ ou $\text{Vect}(f_1)$, est inclus dans F . Dans le premier cas F est inclus dans le noyau donc est égal à ce noyau (dimensions) ; dans le second, $f_1 \in F$. Dans les deux cas, F contient f_1 . Réciproquement, si F est un plan qui contient f_1 alors il est stable par f_A .

Exercice 2 – A est clairement (huhu!) de rang 1 puisque les colonnes sont toutes colinéaires avec la première ! En cognant A contre cette première colonne, on voit même que l'image est incluse dans le noyau. On fait alors notre dessin préféré, on construit une base adaptée au problème, et c'est fini.

Exercice 3 – C'est du cours... enfin c'est dans mon cours ! Au choix : $\text{tr}(A) \neq 0$, ou bien $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A) = \{0\}$. La preuve réside sur une discussion quant à l'hyperplan $\text{Ker}(A)$ versus la droite $\text{Im}(A)$.

Exercice 4 – Proche de l'exercice précédent, le noyau de $\psi - (\text{tr}(A))\text{Id}$ étant cette fois assez gros. Je trouve $f^2 = (\text{tr}(A))f$, ce qui fournit $X(X - \text{tr}(A))$ comme polynôme annulateur scindé à racines simples. Accessoirement, je trouve la question 2 plus naturelle après avoir réfléchi à la diagonalisation, qui fait apparaître naturellement les sous-espaces supplémentaires $\text{Vect}(A)$ et $\text{Ker}(\text{tr})$.

Exercice 5 – Sauf cas exceptionnel ($X = 0$), $M = X^t X$ est de rang 1, avec $\text{Im}(X) \not\subset \text{Ker}(X)$.

Exercice 6 – Dès qu'on voit $A^2 = (\text{tr}(A))A = A$, l'affaire est pliée ! Si l'examineur grogne, on reprend la preuve, en partant par exemple d'une base du noyau et en complétant ; etc.

Exercice 7 – Hum, comment dire... A ne serait-elle pas proche d'une matrice de rang 1 ?

Exercice 8 – On a déjà diagonalisé J_n quelques milliers de fois... Si $J_n X = 0$, alors $A_{n+1} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; si $J_n X = nX$, alors $A_{n+1} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_{n+1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$: cela nous fournit $(n-1) + 2$ vecteurs propres... dont on montre qu'ils constituent une famille libre.

Exercice 9 – Puisque $XA = X.X^2 = X^3 = X^2.X = AX$, on a $\text{Ker}(A - I)$ et $\text{Ker}((A - I)^2)$ qui sont stables par X (il fallait peut-être le remonter...) ce qui donne le caractère triangulaire supérieure. Avant de se lancer dans la synthèse avec X triangulaire supérieure générique, on peut noter que si X avait deux valeurs propres distinctes, alors cela fournirait à A deux droites stables, donc des vecteurs propres non colinéaires, ce qui est exclu. On peut donc chercher A sous la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha & \beta \\ 0 & \varepsilon & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, ce qui permet de gagner un peu de temps.

Exercice 10 – Sans trop de surprise : $\chi_A = (X+1)^2(X+2)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 1. Ensuite, division euclidienne par ce qu'on imagine, et expression du reste dans une famille libre. Pour prouver la liberté, on peut évaluer en -1 et -2 . Pour expliciter la décomposition (qui sera utilisée après Cayley-Hamiltonisation), on obtiendra par ces évaluations α_n et γ_n . Pour β_n , on peut peut-être dériver avant d'évaluer en la racine double -1 .

Exercice 11 – Valeurs propres 0 et 1 avec pour vecteurs propres par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ensuite, si $AX = \lambda X$ alors $B \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ et il reste à prouver la liberté de la famille (de 4 vecteurs) qu'on imagine.

Exercice 12 – Comme bases respectives des sous-espaces proposés, je trouve $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ vs. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(le premier vecteur de la première base répondant d'ailleurs à la deuxième question...). Il n'y a plus qu'à réordonner pour répondre à la troisième question. Pour la dernière question, l'analyse nous propose comme candidats les endomorphismes dont la matrice dans la base adaptée précédente est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais la synthèse est impitoyable : tous les candidats sont rejetés.

Exercice 13 – Je trouve comme valeurs propres : 2, -1 et 3 (c'est cohérent avec la trace...) avec comme vecteurs propres associés respectivement $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Inutile d'inverser la matrice de passage, n'est-ce pas ?

Exercice 14 – Je trouve $\chi_A = (X-2)^2(X+1)$, ce qui est cohérent avec la trace (oui, n'est-ce pas, vous aviez comme toujours vérifié...).

Exercice 15 – $\text{rg}(A - I_3) = 2...$

Exercice 16 – Je travaillerais bien dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ (oui, dans cet ordre)...

Exercice 17 – J'ai commencé par la quatrième question... mais évitez de faire ce genre de petite blague le jour de l'oral !

Exercice 18 – n peu misérable. Après avoir vu que B est inversible et C diagonalisable, on peut écrire : $AB = B^{-1}(BA)B...$

Exercice 19 – Si on note S la matrice du membre de droite, alors $S + I$ doit rapidement être réduite, donc S aussi, qui a pour valeurs propres -1 (triple) et $3...$ et heureusement qu'on est sur $\mathbb{C}$.

On aura noté qu'il n'était pas question de résoudre l'équation $M^2 = S$ mais de trouver une solution.

Exercice 20 – Voir l'exercice suivant !

Exercice 21 – De façon classique (par exemple en travaillant sur une base) : si pour tout x on a $(x, u(x))$ liée alors u est une homothétie. Ensuite par la contraposée, si A n'est pas de la forme λI alors son endomorphisme canoniquement associé a n'est pas une homothétie, donc on peut trouver x_0 tel que $(x_0, a(x_0))$ est libre. On complète en une base et on regarde la matrice de a dans cette base.

Après avoir noté qu'évidemment si A est une homothétie alors $\mathcal{S}(A)$ est réduit un singleton, on montre que dans le cas contraire (A n'est pas une homothétie) alors $\mathcal{S}(A)$ est infini. Déjà, $\mathcal{S}(A)$ contient une matrice B de la forme donnée par la question précédente. Or un changement de base où on se contente de multiplier le premier vecteur par un scalaire non nul nous donne autant de matrices différentes semblables à B donc à A . Ainsi, seules les matrices d'homothétie ont une classe de similitude finie.

Exercice 22 – C est un noyau. Dans le cas où f est diagonalisable (disons dans une base $\mathcal{F}$) à spectre simple, les g commutant avec f sont exactement (analyse-synthèse, les sous-espaces propres de f étant stables par g) les endomorphismes dont la matrice dans $\mathcal{F}$ est diagonale : $\dim(C) = 3$. Dans le cas

nilpotent d'indice 3 on se ramène au cas $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour trouver les endomorphismes qui auront dans

une bonne base une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$: la dimension vaut 3. Enfin, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$

aura probablement un commutant de dimension 5.

Exercice 23 – On peut établir l'injectivité par un calcul par bloc... ou passer directement à la recherche d'une matrice inverse raisonnable. Inspiré par le calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\sqrt{2}R_{-\pi/4})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

j'ai une furieuse envie de considérer $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P & -P \\ P & P \end{pmatrix}$ puis (après vérification), plutôt $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1} \\ P^{-1} & P^{-1} \end{pmatrix} !$

Rappelez-vous : en maths, avant de faire des choses subtiles on tente souvent des choses raisonnables qui marchotent, puis qui marchent après coup de tournevis...

On pouvait aussi via un « pivot par bloc » noter que le déterminant de Q vaut $2 \det(P)^2 \neq 0$.

Plutôt que de calculer des déterminants par blocs, j'ai commencé par diagonaliser avant d'en déduire le polynôme caractéristique ! Vu la question précédente, le calcul de QBQ^{-1} n'est pas déraisonnable et permet effectivement de conclure. Enfin, sauf erreur, je trouve $\det(K_n) = \frac{(2n+1)!}{n+1}$.

Exercice 24 – Le premier point est du cours. Ensuite, décomposer χ_A en produit d'irréductibles, et constater que chacun, évalué en B , donne une matrice inversible. Pour le troisième point, $A^k X = XB^k$, puis $P(A)X = XP(B)$, que j'appliquerais bien à $P = \chi_A$. Enfin, l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $X \mapsto AX - XB$ me semble injectif...

Exercice 25 – Le polynôme annulateur scindé à racines simples $X^3 - 4X^2 - 4X = X(X - \alpha)(X - \beta)$ nous assure qu'une éventuelle solution est diagonalisable. Mais une fois diagonalisée, la trace nulle imposerait que $\sqrt{2}$ soit rationnel (ce qui n'est guère raisonnable) sauf dans le cas trivial où $\text{Ker}(M - \alpha I_n)$ et $\text{Ker}(A - \beta I_n)$ sont réduits à $\{0\}...$

Exercice 26 – La diagonalisabilité de u nous donne un polynôme annulateur de u^2 scindé à racines simples, donc un polynôme annulateur de u plus compliqué, mais qui est aussi scindé (on est dans $\mathbb{C}$, donc $X^2 - \lambda = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$) et à racines simples (les valeurs propres sont différentes de 0).

Exercice 27 – Sans avoir fait le calcul, je suis prêt à parier que cette matrice pourtant symétrique n'est pas diagonalisable... Arf; après calcul, elle l'est ! J'imagine que l'examineur attendait seulement l'erreur de raisonnement « symétrique donc diagonalisable », ce qui est assez crétin : autant donner un exemple sur lequel la conclusion est fausse !

Exercice 28 – J'aurais tendance à penser que $u^2 = \text{Id}_E$, et on est ramené au programme de première année sur les symétries...

Exercice 29 – B serait nilpotente d'indice... trop grand puisqu'on aurait $B^{2n-2} \neq 0$!

Exercice 30 – n sens n'est pas trop difficile... Pour l'autre : on se place dans les sous-espaces propres de M^d : chacun est stable par M , et la restriction de M à ce sous-espace est annulée par un polynôme scindé à spectre simple de la forme $X^d - \lambda$ (ça marche car on est dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 31 – Petit rang... Bon, la trace de cette matrice puis de son carré peuvent aider.

Exercice 32 – En prenant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}AQ = \text{Diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $Q^{-1}BQ = \text{Diag}(-1, 1, 1)$. On est alors ramené à un (deux !) problèmes d'interpolation polynomiale.

Exercice 33 – J'écrirais bien $v + u = v \circ (\text{Id} + v^{-1} \circ u)$: u commute avec v^{-1} , donc $v^{-1} \circ u$ est bien nilpotent... On peut en déduire que lorsque λ n'est pas valeur propre de d (et donc que $d - \lambda \text{Id}$ est inversible) on a $\det(f - \lambda \text{Id}_E) = \det((d - \lambda \text{Id}_E) + n) = \det(d - \lambda \text{Id}_E)$. Pour étendre cette relation à tous les réels λ , il suffit de noter qu'on est face à deux polynômes (donc continus) qui coïncident sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points...

Exercice 34 – Après diagonalisation (n valeurs propres distinctes), analyse/synthèse géométrique... ou matricielle ! On trouvera 2^n solutions.

Exercice 35 – Matrice de rang 1 (ou nul !). La trace est-elle nulle ?

Exercice 36 – Il me semble que $\chi_A = X(X-1)(X-a)$, et il s'agit donc de discuter.

Exercice 37 – Je travaillerais bien dans une base adaptée à la fois à a et à φ . THE question is : a-t-on a dans $\text{Ker}(\varphi)$ ou non ?

Exercice 38 – Sauf erreur, $\chi_A = (X-1)(X-3)(X+4)$, donc je pronostique : aucune solution sur $\mathbb{R}$, et 8 sur $\mathbb{C}$.

Exercice 39 – Si A est la matrice qu'on imagine, je trouve $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$, et le rang de $A - 2I$ vaut 2, donc A n'est pas diagonalisable, mais est trigonalisable bien entendu...

Exercice 40 – $\chi_A = (X-2)(X+2)(X-4)$. Je suggère fortement une géométrisation. Selon qu'on est sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 = D$ aura ou non des solutions...

Exercice 41 – On $\chi_A = X(X^2 - (ab + ac - bc))$. Il reste à discuter de la position de $ab + ac - bc$ par rapport à 0...

Exercice 42 – La matrice dans la base canonique donne pas mal d'informations.

Exercice 43 – Trigonaliser, et obtenir un système « à la vandermonde » sur les valeurs propres et leurs multiplicités. Finalement il ne peut y avoir qu'une valeur propre, qui est nulle.