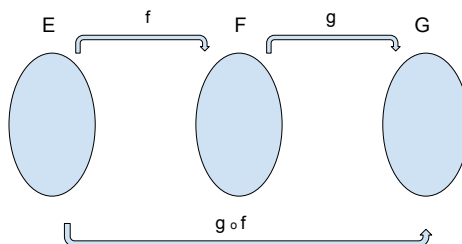


1 Composition de surjections

Montrer que la composée de deux surjections est surjective.

On commence par les patates, comme il se doit, ce qui fixe les notations :



Supposons donc que f est une application surjective de E dans F et que g est une application surjective de F dans G . On va montrer que $g \circ f$, qui est une application de E dans G , est surjective.

On fixe pour cela $z \in G$ et on veut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.

Tout d'abord, la surjectivité de g nous assure qu'il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$ (et on fixe y ainsi).

Ensuite, la surjectivité de f nous assure qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (et on fixe x ainsi).

On a alors $(g \circ f)(x) = z$, ce qui était le point attendu.

La composée de deux surjections est bien une surjection.

2 Une limite

Montrer que $\left(\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right)^{n \cos(1/n)}$ possède une limite quand n tend vers $+\infty$.

On a $\left(\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right)^{n \cos(1/n)} = \exp\left(n \cos(1/n) \ln\left(\ln\left(e\left(1 + \frac{1}{ne}\right)\right)\right)\right)$ (on aura noté qu'à chaque étape on travaille un peu : le « e » a été factorisé dans le logarithme). Voyons les différents termes dans le produit. Déjà, $n \cos(1/n) \sim n$, et par ailleurs $\ln\left(e\left(1 + \frac{1}{ne}\right)\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{ne}\right) = 1 + \frac{1}{ne} + o(1/n)$ donc

$$\ln\left(\ln\left(e\left(1 + \frac{1}{ne}\right)\right)\right) = \ln(1 + u) \sim u = \frac{1}{ne} + o(1/n) \sim \frac{1}{ne}$$

donc $u_n = n \cos(1/n) \ln\left(\ln\left(e\left(1 + \frac{1}{ne}\right)\right)\right) \sim \frac{1}{e}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/e$, donc **par continuité de l'exponentielle** :

$$\left(\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right)^{n \cos(1/n)} = e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1/e}.$$

Et il n'était évidemment pas question de « passer l'équivalent à l'exponentielle »...

3 Image injective d'une famille libre

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F . (E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels)

Sous les hypothèses de l'énoncé, partons d'une combinaison linéaire nulle des $u(e_i)$ et montrons qu'elle est triviale (si vous faites autre chose en partant autrement ou en arrivant ailleurs, vous n'aurez pas

montré la liberté).

On fixe donc des $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0$ et on va montrer que les λ_i sont nuls.

Par linéarité, on a $u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0 = u(0)$ donc par injectivité de u , $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ (on aurait aussi pu parler du noyau de u qui est réduit à 0). Mais la liberté de $(e_1, \dots, e_n)$ nous assure que les λ_i sont nuls, ce qu'on souhaitait démontrer.

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est bien libre.

4 Complexes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les complexes z vérifiant $z^{2n} = 1$ sont ceux de la forme $e^{ik\pi/n}$, avec k décrivant $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$

Il s'agit de montrer que $E_1 = \{z \in \mathbb{C}; z^{2n} = 1\}$ est égal à l'ensemble $E_2 = \{e^{ik\pi/n} \mid k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket\}$. Si vous n'avez pas compris qu'il s'agissait de montrer l'égalité de deux ensembles (ou une équivalence), vous n'avez pas compris la question : ce doit être retravaillé.

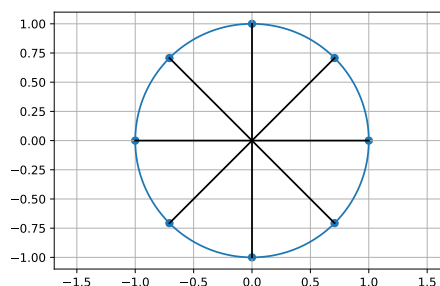
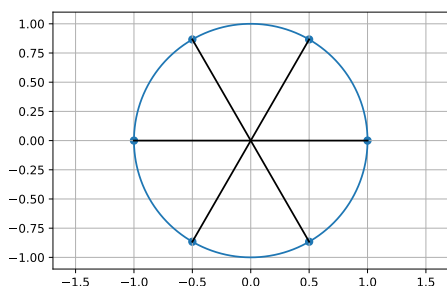
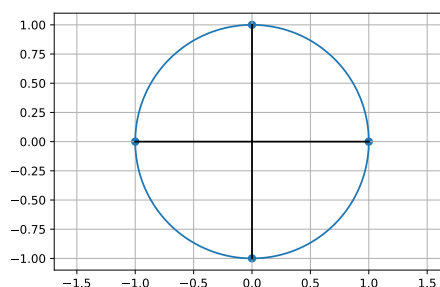
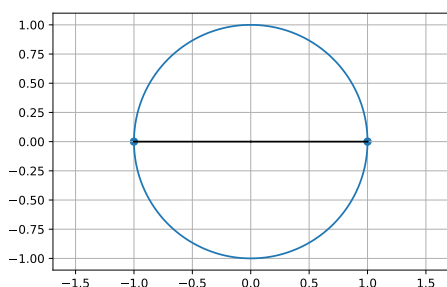
Et il n'est *évidemment* pas question de travailler par équivalence.

- L'inclusion $E_2 \subset E_1$ est une simple vérification : si $z \in E_2$ alors il existe $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$ tel que $z = e^{ik\pi/n}$, et on a alors $z^{2n} = e^{2ik\pi} = 1$, donc $z \in E_1$.
- Réciproquement : si $z \in E_1$, on l'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ (en cherchant la preuve au brouillon vous avez probablement écrit $\theta \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, avant de réaliser en fin de preuve que pour localiser k , il était pratique de localiser θ dans l'intervalle suffisant $[0, 2\pi[$). On a $\rho^{2n} e^{2ni\theta} = 1$, donc en observant le module on a $\rho^{2n} = 1$, ce qui impose (puisque ρ est un réel positif) : $\rho = 1$. On obtient ensuite $e^{2ni\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2n\theta = 2k\pi$.

Bien entendu personne n'aura écrit un charabia à base de $e^{2ni\theta} = e^{2ik\pi}$ pour tout k donc... donc quoi ? Donc $2n\theta = 2k\pi$ par identification bien entendu ! Ce qu'on utilise c'est le fait que les seuls réels φ vérifiant $e^{i\varphi} = 1$ sont ceux de la forme $2k\pi$ avec k entier.

Bref, $z = e^{ik\pi/n}$, et il reste à localiser $k = \frac{n\theta}{\pi}$, ce qu'on obtient facilement grâce à l'encadrement $0 \leq \theta < 2\pi$ qui fournit $0 \leq k < 2n$ et permet de conclure puisque k est entier.

Bonus : les ensembles en question pour $n \in \{2, 4, 6, 8\}$!



5 Une décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: $F = \frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)}$.

La fraction a un degré strictement négatif (sans quoi il aurait fallu commencer par une division euclidienne), donc le théorème de décomposition en éléments simples nous assure l'existence de coefficients réels tels que :

$$F = \frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{cX+d}{X^2+2}.$$

Il est évidemment hors de question de mettre tout ceci sous même dénominateur **et de procéder à je ne sais quelles identifications, concept à manipuler avec la plus grande prudence... en tout cas cette année.** Par contre considérer la fraction $(X-1)F$ (sous ses deux formes) puis évaluer en 1 chacune des formes (et il n'est aucunement question de faire tendre X vers 1!) fournit :

$$((X-1)F)(1) = a = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

(On aura noté l'importance des parenthèses autour de $(X-1)F...$)

De même :

$$((X+2)F)(-2) = b = \frac{7}{-3 \times 6} = -\frac{7}{18}.$$

On passe ensuite par $\mathbb{C}$ pour déterminer deux réels en même temps (par identification des parties réelles et imaginaires) :

$$((X^2+2)F)(\sqrt{2}i) = c\sqrt{2}i+d = \frac{-1-\sqrt{2}i}{(\sqrt{2}i-1)(\sqrt{2}i+2)} = \frac{-1-\sqrt{2}i}{-4+\sqrt{2}i} = \frac{1}{18}(-1-\sqrt{2}i)(-4-\sqrt{2}i) = \frac{1}{9} + \frac{5\sqrt{2}}{18}i,$$

donc $c = \frac{5}{18}$ et $d = \frac{1}{9}$ et finalement :

$$\frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)} = \frac{1/9}{X-1} - \frac{7/18}{X+2} + \frac{\frac{5}{18}X + \frac{1}{9}}{X^2+2}.$$

Pour me rassurer j'ai fait deux petites vérifications peu coûteuses : que vaut $F(0)$? Et quelle est la limite de $tF(t)$ quand t tend vers $+\infty$? « D'une part... et d'autre part... ». Puis une dernière vérification encore moins coûteuse :

partial fractions of (X^2-X+1)/((X-1)(X+2)(X^2+2))

🔥 NATURAL LANGUAGE
🔢 MATH INPUT
⌨️ EXTENDED KEYBOARD

Input

partial fractions	$\frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)}$
-------------------	---

Result

$$\frac{X^2 - X + 1}{(X-1)(X+2)(X^2+2)} = \frac{5X+2}{18(X^2+2)} + \frac{1}{9(X-1)} - \frac{7}{18(X+2)}$$

Plots