

Quelques calculs en algèbre linéaire

À rendre le lundi 28 septembre 2026 dernier délai.

1 Une matrice à inverser

Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Vous n'avez jamais inversé une matrice par vous-même, ou autrement qu'en bricolant ? Il est temps d'apprendre... vous pouvez par exemple résoudre formellement $MX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ en ne faisant rien d'autre que du pivot. Normalement ce système sera équivalent à $X = NY$ pour une certaine matrice N , et il restera à conclure.

2 Des systèmes linéaires

Pour les deux premières questions, après des calculs propres, on présentera clairement l'ensemble des solutions.

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

2) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} -x + (1 + \lambda)y = -4 - \mu \\ 2x - \lambda y = 9 + \mu \end{cases}$$

3) Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 + \lambda \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$.

5) Calculer le déterminant des matrices A et B .

3 Deux polynômes caractéristiques

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer sous forme factorisée le déterminant des matrices $\lambda I_3 - C$ et $\lambda I_3 - D$, avec

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

4 Un hyperplan

On travaille ici dans $E = \mathbb{R}^4$; on pose $f_1 = (1, 2, 3, 4)$, $f_2 = (-1, 2, -3, 4)$, et $f_3 = (4, 3, 2, 1)$.

- 1) Montrer que $H = \text{Vect}(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est un hyperplan de E .
- 2) En donner une équation, c'est-à-dire une forme linéaire dont H est le noyau.
On pourra par exemple s'intéresser au rang de la famille $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{v})$, avec $\vec{v} = (x, y, z, t)$ un vecteur générique : à quelle condition (sur ce rang) $\vec{v}$ est-il dans H ?
- 3) Donner un supplémentaire de H .
- 4) Donner une/des condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) simple(s) sur (x, y, z, t) pour avoir $\vec{f} = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.
On pourra à nouveau raisonner sur le rang de $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f})$.
- 5) On définit $\vec{g} = (-1, -5, 7, -5)$. Donner une base de $\text{Vect}(\vec{f}_1, \vec{f}_2) \cap \text{Vect}(\vec{f}_3, \vec{g})$.

5 Supplémentaires, extraction, complétion

- 1) Dans $F = \mathbb{R}^5$, donner un supplémentaire du sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pourra pivoter sur les colonnes jusqu'à obtenir un système échelonné puis interpréter géométriquement le résultat avant d'aller plus loin.

- 2) Dans $G = \mathbb{R}_4[X]$, on considère les quatre polynômes $P_1 = 1 + X + X^2 + 2X^3$, $P_2 = 1 + 2X^2 + X^3 - X^4$, $P_3 = X - X^2 + X^3 + X^4$ et $P_4 = 1 + 2X - 3X^3 + X^4$. Extraire de (P_1, P_2, P_3, P_4) une famille libre maximale, puis compléter cette famille libre en une base de G .

6 Des noyaux et images

On s'intéresse à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il y a des 0 partout ailleurs).

- 1) La matrice A est-elle inversible ?
- 2) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_7$ n'est pas inversible.
On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ces valeurs.
- 3) Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, déterminer $\text{rg}(A - \lambda I_7)$.
- 4) Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, déterminer $\text{Ker}(A - \lambda I_7)$, ainsi que $\text{Ker}(A - \lambda I_7)^2$, etc.