Khôlles : quinzaine numéro 3

Du 2 au 13 novembre 2026 – attention au mercredi 11, férié

Le cours, à défaut de reculer, n'a guère avancé [1]...

1 Première semaine : algèbre linéaire

Toute l'algèbre linéaire

- Images et noyaux itérés. Les endomorphismes nilpotents sont trigonalisables.
- Hyperplans et formes linéaires (histoire de suivre le programme officiel, mais...).
- Calcul matriciel : changements de bases, réduction du rang ($PAQ = J_r$).
- Les matrices de rang 1 ont fait l'objet d'une attention toute particulière.
- Quand une base est adaptée à l'image et/ou au noyau d'une application linéaire (ce qui n'est pas rare, surtout quand on la construit dans ce but...), la matrice de l'application dans cette base n'est pas quelconque !
- Déterminant (en pratique ; ne pas creuser la théorie !).
- Polynômes : rappels de première année, interpolation, relations coefficients-racines (aucune à connaître ; toutes à savoir retrouver).

2 Deuxième semaine : Réduction

- (Re)découverte des projections et symétries.
- Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres ; endomorphismes diagonalisables (existence d'une base diagonalisante, ou E s'écrivant comme somme des sous-espaces propres). Extension aux matrices (mais le point de vue géométrique est toujours présent).
- Étude à la main de quelques cas comme les matrices triangulaires, et les endomorphismes ou matrices de rang 1.
- Utilisation du polynôme caractéristique.
- CN de diagonalisabilité : χ_u scindé. CS : χ_u scindé à racines simples. CNS : χ_u scindé, et les sous-espaces propres ont pour dimension la multiplicité de la valeur propre.

3 Questions de cours (pas le lundi 2 !)

- (S1) Les endomorphismes nilpotent sont trigonalisables.
- (S1) Si un une matrice A est de rang 1, alors $A^2 = \mathrm{tr}(A)\, A$.
- (S1) Théorème d'interpolation de Lagrange.
- (S1) Un endomorphisme f vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que f est la par rapport à E_1 parallèlement à E_2.
- (S2) Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- (S2) Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- (S2) Si P est un polynôme annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Rac}(P)$; avec égalité lorsque P est le polynôme caractéristique.

4 Coming next

Prochaine quinzaine : fin de la réduction. Début des suites et séries de fonctions.

1. Déjà signalé en 2024 et 2025 ; les années se suivent et se ressemblent !