Psi 999 – 2026/2027 ψ **DS 2 – 4 heures**

Le 3 octobre 2026 – calculatrices autorisées

Ce DS se déroule en deux temps : la première partie, que vous avez sous les yeux, sera traitée en premier et sur une copie (ou plusieurs) à part, et rendue entre 8H40 (pas avant : soignez le travail !) et 9H00 (pas après : il faut avancer...).

1 Un peu de cours

1. Établir soigneusement un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ lorsque n tend vers l'infini.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer :
$$v \circ u = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$$
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie n. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel $u^N = 0$. Montrer : $u^n = 0$.
4. Énoncer et démontrer le théorème de Grassmann (concernant la dimension d'une somme de sous-espaces).
5. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de même dimension, alors u est injective si et seulement si elle est surjective.

Suite du DS 2

Les durées sont données à titre indicatif !

2 Commutant de $\mathcal{L}(E)$ (40 minutes)

On s'intéresse ici à l'ensemble des endomorphismes d'un espace donné commutant avec tous les autres endomorphismes.

1. Le cas $n = 2$.
   (a) On définit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Calculer les produits MN, NM, MP, PM, NP et PN.
   (b) Expliciter deux matrices A et B telles que $AB \neq BA$.
   (c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ commute avec toutes les autres matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (i.e. $AB = BA$) si et seulement si A est de la forme λI_2.
   (d) Soit E un espace de dimension 2. Déterminer *avec soin*[1] l'ensemble des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
2. On repasse en dimension n quelconque : déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les autres, puis les endomorphismes de E (espace vectoriel de dimension n) commutant avec tous les autres.
   Pour information : en dimension infinie, les endomorphismes commutant avec tous les autres restent bien ceux que vous pouvez imaginer.

3 Formule d'inversion de Pascal (35 minutes)

On va montrer ici que deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

Dans les deux premières questions et seulement elles, n est fixé et Φ désigne l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, \qquad \Phi(P) = P(X + 1)$$

(attention, P DE $X + 1$, pas P FOIS $X + 1$).

1. Montrer que Φ est un automorphisme (applications linéaires bijective d'un espace dans lui-même) de E en exhibant $\Psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_E$.
   On explicitera, pour $P \in E$, la valeur de $\Psi(P)$.
2. Déterminer les matrices A et B de Φ et Ψ dans la base canonique de E. Que dire de ces deux matrices (l'une vis-à-vis de l'autre) ?
3. On suppose ici :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k$$
   Traduire ces relations matriciellement (à n fixé, écrire les relations aux rangs $0, 1, ..., n$), et en déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$
4. Prouver la réciproque.

1. Genre : sans parler d'une base qui n'aurait pas été introduite...

4 Un exercice d'oral (30 minutes)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) + P(X) = 0$. Montrer que $P = 0$.
2. Recommencer, mais de façon moins fumeuse.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X+1) + P_n(X) = X^n$.
4. Pour $n \geqslant 1$, trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}. En déduire un moyen pour calculer itérativement les P_n.
5. Calculer P_n pour $n \leqslant 3$.

5 Autour des séries de Bertrand (1H15)

1. *Convergences et divergences*
   (a) Justifier simplement le fait que $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln^3 n}$ est convergente et $\sum \dfrac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ est divergente.
   (b) Montrer que la série de terme général $\sum \dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est convergente (on pourra comparer $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}}$).
   (c) Que dire de la série $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$? (On pourra comparer le terme général à $\frac{1}{n^{3/4}}$)
   (d) À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que $\sum \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ converge.
   (e) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien : ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. *Des estimations de sommes partielles et restes*
   (a) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$
   On commencera par faire un dessin conduisant (pour des valeurs de k à préciser) à un encadrement de $\dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ par deux intégrales ; encadrement qu'on prouvera. Ensuite on sommera, etc...
   (b) Même chose avec $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha \in]0,1[$.
   (c) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$
   Ici, on passera par un encadrement de $\sum_{k=n}^{N}$, encadrement qu'on exploitera avec soin...
   (d) Même chose avec $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha > 1$.
   (e) Donner finalement un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$