Psi 999 – 2026/2027 ψ **DS 2 – corrigé**

1 Un peu de cours

1. On commence par **encadrer**, pour $1 \leqslant n$ et $N \geqslant n+1$ la somme partielle $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{3/2}}$ par des intégrales, avec la comparaison et le dessin qu'on imagine (enfin... qu'on fait quand même sur la copie !) :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \forall N \geqslant n+1 \qquad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

On calcule ensuite les deux membres extérieurs, en se souvenant qu'on ne cherche pas une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ (ça fait mal à la tête) mais on cherche plutôt à écrire un truc de la forme $(...)' = t^{-3/2}$. On constate alors que dans l'encadrement précédent les trois termes possèdent une limite lorsque N tend vers $+\infty$ (limites différentes, accessoirement ; on n'évoquera certainement pas les gendarmes à cet instant). On peut donc passer les deux inégalités à la limite (quand N tend vers l'infini) pour obtenir :

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On note alors que le membre de gauche et celui de droite sont équivalents à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, de sorte qu'en divisant tout ce beau monde par cette chose, on peut gendarmiser pour obtenir :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}.}$$

2. Pour le sens direct, on suppose que $v \circ u = 0$ et on montre l'inclusion demandée en fixant $y \in \mathrm{Im}\,(u)$ et en montrant qu'il appartient à $\mathrm{Ker}\,(v)$, c'est-à-dire : $v(y) = 0$. Une géniale intuition nous amène à préciser que, en tant qu'habitant de l'image de u, y s'écrit $u(x)$ pour un certain $x \in E$. On a alors $v(y) = v(u(x)) = (v \circ u)(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}\,(v)$, et on a bien $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ et montrons que $v \circ u = 0$. Puisqu'il s'agit d'une application linéaire de E dans G, on fixe $x \in E$ et on veut montrer que $(v \circ u)(x) = 0$, ou encore que $v(u(x)) = 0$. Or $u(x) \in \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(v)$, puis effectivement $v(u(x)) = 0$, ce qui termine la preuve.

$$\boxed{v \circ u = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)}$$

3. Sous les hypothèses de l'énoncé, on prend r **le plus petit** entier strictement positif tel que $u^r = 0$ (et un tel entier existe puisque $u^N = 0$). On est alors assuré de l'existence d'un $x_0 \in E$ tel que $u^{r-1}(x_0) \neq 0$. On montre ensuite de façon classique que $\big(x_0, u(x_0), ..., u^{r-1}(x_0)\big)$ est libre. Puisque cette famille est de cardinal r, on en déduit que $r \leqslant n = \dim(E)$. Il reste à écrire : $u^n = u^{n-r} \circ u^r = 0$.

$$\boxed{u^n = 0}$$

Bon... prouvons effectivement la liberté en question, en partant d'une combinaison linéaire nulle $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots \lambda_{r-1} u^{r-1}(x_0) = 0$. On peut montrer la nullité des λ_i en évaluant u^{r-1} en cette combinaison linéaire, et en enchaînant avec une récurrence. Mais on peut aussi supposer, par l'absurde, qu'il existe au moins un des λ_i qui est non nul et en prenant i_0 le plus petit entier tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. En évaluant u^{r-1-i_0} en la combinaison linéaire on obtient $\lambda_{i_0} u^r(x_0) = 0$, ce qui est absurde.

4. **Énoncé :** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace E (de dimension finie si on veut, mais en fait ce n'est même pas utile), alors $F+G$ est de dimension finie et :
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$
Preuve : On prend une base $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_i)$ de $F \cap G$. Elle constitue une famille libre de F, donc peut être complétée en une base $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_i, f_1, ..., f_j)$ de F ; elle peut de même être complétée en une base $\mathcal{G} = (e_1, ..., e_i, g_1, ..., g_k)$ de G. Si on parvient à montrer que tout ce beau monde $\mathcal{H} = (e_1, ..., e_i, f_1, ..., f_j, g_1, ..., g_k)$ constitue une base de $F+G$ alors on aura d'une part $\dim(F+G) = i+j+k$ et d'autre part $\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = (i+j)+(i+k)-i = i+j+k$, ce qui terminera la preuve.
Montrons donc que $\mathcal{H}$ est libre et génératrice de $F+G$. Le deuxième point, une fois n'est pas coutume, est plus simple que le premier : chaque habitant de $F+G$ est la somme d'un habitant de F et d'un habitant de G. On décompose chacun de ces deux vecteurs selon la base à laquelle on pense, et en sommant on voit que le vecteur initial est bien combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{H}$. Pour la liberté, on part d'une combinaison linéaire nulle, et on fait passer de l'autre côté de l'égalité les termes avec les g_ℓ (par exemple). On se retrouve alors face à un vecteur qui est d'une part dans F (membre de gauche) et dans G (membre de droite), donc qui est dans l'intersection, donc s'écrit comme combinaison linéaire des e_ℓ. En repassant tout du même coté, on trouve ce qu'on veut via la liberté des bases de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, ce qui termine la preuve.
$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$
Vous n'avez rien compris ? Normal : il fallait avoir un papier et un crayon...

5. Plaçons nous sous les hypothèses de l'énoncé, et supposons u injective. Pour montrer la surjectivité, il s'agit d'établir que l'image vaut F, ce qui revient à montrer qu'elle a la même dimension que F. Mais le théorème du rang nous dit quelque chose sur la dimension de l'image, en relation avec celle du noyau (qui est nulle). Avec un crayon, on voit alors qu'on a ce qu'on voulait.
Et pour la réciproque ? C'est pareil.

2 Commutant de $\mathcal{L}(E)$

1. Comment ne pas traiter correctement les deux premières questions ?
   (a) Sans grand génie :
$$MN = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad NM = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \quad MP = \begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix} \quad PM = \begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix} \quad NP = \begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix} \quad PN = \begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}$$
   (b) Il me semble qu'en prenant $A = M$ et $B = N$ on obtient un exemple, non ?
   Ceux ayant utilisé P auront certainement fourni une infinité de contre-exemples, dont au moins un faux, et n'auront donc pas répondu correctement à la question. Vous êtes furieux ? C'est bien, vous allez finir par comprendre que fournir un contre-exemple qui marche, c'est mieux qu'en fournir deux, voire une infinité, voire une infinité dont un faux...
   (c) Si A est de la forme λI_2, alors A commute évidemment avec toutes les autres matrices.
   Réciproquement, supposons que $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ commute avec toutes les autres matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a en particulier $AM - MA = 0$ donc $\begin{pmatrix}-c&a-d\\0&c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ donc $a = d$ et $c = 0$.
   De même, $AN = NA$ fournira (à nouveau) $a = d$ mais surtout $b = 0$. Ainsi, $A = \begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix} = aI_2$.
   $$\boxed{\text{Les matrices commutant avec toutes les autres sont exactement celles de la forme } \lambda I_2.}$$
   (d) Bien entendu si u est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$, alors u commute avec tout $v \in \mathcal{L}(E)$, puisqu'on a alors $u \circ v = \lambda v = v \circ u$.
   Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les autres endomorphismes de E, fixons une base de E (pitié, pas canonique : ça n'a pas de sens !). Notons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

la matrice de u dans cette base. Si B est une autre matrice $(2,2)$, alors elle représente un endomorphisme v dans la base qu'on s'est fixée. Mais zalors la relation $u\circ v = v\circ u$ nous donne $AB = BA$. Ainsi, A commute avec toutes les matrices (oui : on avait fixé B quelconque, et c'est fondamental : ça ne marcherait pas si B arrivait à l'écran comme matrice d'un endomorphisme v qu'on aurait fixé au début...), donc est de la forme λI_2 d'après la question précédente... donc u est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$.

Les endomorphismes commutant avec tous les autres sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$.

2. Bien entendu, les matrices de la forme λI_n commutent avec toutes les autres. Réciproquement, soit A une matrice telle que $AB = BA$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors en particulier $AE_{1,2} = E_{1,2}A$ (avec $E_{1,2}$ ce que vous imaginez), ce qui fournit après calcul avec vos petits doigts (ne comptez pas sur moi pour le typographier : vous devez poser ce calcul une fois dans votre vie avec vos propres doigts et votre propre cerveau) : $a_{1,1} = a_{2,2}$, $a_{2,j} = 0$ pour tout $j \neq 2$ et $a_{i,1}$ pour tout $i \neq 1$.
Si on rejoue à ça avec $E_{1,3}$, etc... on comprend que la matrice A a tous ses coefficients en dehors de la diagonale qui sont nuls... et tous les coefficients diagonaux égaux : elle est bien de la forme λI_n !

Les matrices commutant avec toutes les autres sont exactement celles de la forme λI_n.

Le passage des matrices aux endomorphismes se fait exactement comme en dimension 2, en commençant par fixer une base de l'espace.

Les endomorphismes commutant avec tous les autres sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$.

3 Formule d'inversion de Pascal

1. Le caractère linéaire de Φ est clair... mais à signaler. Ensuite, si on note $\Psi : P \mapsto P(X-1)$, on a alors clairement Ψ linéaire, avec $\Phi\circ\Psi = \Psi\circ\Phi = \mathrm{Id}_E$, et ainsi :

Φ est un automorphisme de E

2. Les matrices recherchées sont dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, et on trouve en position (i,j) le coefficient de X^{i-1} dans la décomposition (dans la base canonique $\mathcal{E}$ de E) de $\Phi(X^{j-1})$ (respectivement $\Psi(X^{j-1})$), qui est donné par la formule du binôme :

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{j-1}{k} X^k \qquad \text{et} \qquad (X-1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} X^k$$

$$A = \mathrm{Mat}(\Phi,\mathcal{E}) = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \text{ et } B = \mathrm{Mat}(\Psi,\mathcal{E}) = \left((-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$$

Il s'agit bien entendu de matrices triangulaires supérieures, les coefficients binomiaux étant nuls pour une bonne partie d'entre eux. Et bien entendu j'acceptais des matrices « avec des petits points », pour peu qu'elles soient clairement écrites (et c'est presque mieux !).

Puisque Φ et Ψ sont des automorphismes réciproques, on a par ailleurs (c'est l'objectif de cette question !) :

$$B = A^{-1}$$

3. Attention à tourner la tête correctement :

$$\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Puisque $B = A^{-1}$, on a également A^{T} inversible, d'inverse $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}$; ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = B^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \text{ et en particulier } \alpha_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\beta_k}$$

4. Évidemment, l'hypothèse $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = B^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ implique $\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$...

   $$\boxed{\text{Ce qui prouve la réciproque !}}$$

4 Un exercice d'oral

1. On fixe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1)+P(X) = 0$. Si P était non nul, il aurait un terme dominant, disons αX^n (avec donc $\alpha \neq 0$). Mais alors en développant $P(X+1)+P(X)$ on trouverait le terme $2\alpha X^n$ en plus de termes de degré $< n$: c'est impossible puisque $P(X+1)+P(X) = 0$. Par l'absurde, on a bien montré :

   $$\boxed{\text{Si } P(X+1)+P(X) = 0, \text{ alors } P = 0.}$$

2. Hum...

3. La question précédente nous invite à considérer l'application $P \mapsto P(X+1)+P(X)$ dont on vient de parler du noyau. Mais il s'agit ici de prendre une vraie initiative dans le choix des espaces (de départ et d'arrivée). On a vu que si $P \neq 0$, alors $P(X+1)+P(X)$ a le même degré que P. On peut donc considérer l'application $\Phi_n : P \in E = \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

   Il s'agit d'un endomorphisme de E, de noyau réduit à 0 d'après la question précédente. Il est donc injectif, et comme on est en dimension finie, il est bijectif, donc X^n possède un antécédent : l'existence est prouvée. À ce stade, on a prouvé l'unicité (par bijectivité) de l'antécédent, mais attention : unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$!

   Pour terminer la preuve de l'unicité, on a vu encore une fois que $P(X+1)+P(X)$ a le même degré que P, donc si $P(X+1)+P(X) = X^n$, alors P est de degré n, donc est égal à celui qu'on a trouvé dans ce qui précède.

   $$\boxed{\text{Il existe bien un unique } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P(X+1)+P(X) = X^n.}$$

4. Soit $n \geqslant 1$. Déjà, on a :

   $$(P_n(X+1)+P_n(X))' = (X^n)' = nX^{n-1} = n\left(P_{n-1}(X+1)+P_{n-1}(X)\right),$$

   Mais par ailleurs, $(P_n(X+1)+P_n(X))' = P_n'(X+1)+P_n'(X)$, donc on a : $\Phi_n(P_n') = n\Phi_n(P_{n-1})$, ou encore $\Phi_n(P_n' - nP_{n-1}) = 0$, donc par injectivité de Φ_n :

   $$\boxed{P_n' = nP_{n-1}}$$

   Ainsi, « en primitivant P_{n-1} », on obtiendra un polynôme qui vaudra P_n à une constante près. Constante qu'on peut ajuster à l'aide de $P_n(1)+P_n(0) = 0^n$.
   Il reste à noter que le polynôme constant $P_0 = 1/2$ vérifie bien $P_0(X+1)+P_0(X) = 1$.

   $$\boxed{\text{Les relations } P_0 = 1/2,\ P_n' = nP_{n-1} \text{ et } P_n(1)+P_n(0) = 0 \text{ permettent de calculer itérativement les } P_n.}$$

5. On a déjà vu :

   $$\boxed{P_0 = \frac{1}{2}.}$$

Ensuite, $P_1' = 1/2$ donc $P_1 = \dfrac{X}{2} + K$, puis $2K + 1/2 = 0$, donc $K = -1/4$.

$$\boxed{P_1 = \frac{X}{2} - \frac{1}{4}\cdot}$$

On continue avec $P_2' = X - 1/2$ donc $P_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + K$, puis $2K = 0$ donc $K = 0$

$$\boxed{P_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}\cdot}$$

Enfin, $P_3' = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{3}{2}X$ donc $P_3 = \dfrac{X^3}{2} - \dfrac{3}{4}X^2 + K$ avec $2K + 1/2 - 3/4 = 0$ donc $K = 1/8$:

$$\boxed{P_3 = \frac{X^3}{2} - \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{8}\cdot}$$

5 Autour des séries de Bertrand

1. (a) Il suffit de noter que $\dfrac{1}{n^2 \ln^3 n} = o(1/n^2)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(\ln^5 n/\sqrt{n})$ puis d'invoquer la comparaison **entre des séries à termes positifs** :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^2 \ln^3 n} \text{ est convergente et } \sum \frac{\ln^5 n}{\sqrt{n}} \text{ est divergente.}}$$

Le deuxième cas est peut-être moins clair puisqu'il s'obtient, en cas de doute, en raisonnant par l'absurde : si $\sum \dfrac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ *était convergente, alors* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *le serait aussi...*

(b) Le terme général $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est certes « plus gros que $\dfrac{1}{n^2}$ », terme général d'une série convergente (ce n'est donc pas dans le bon sens), mais il est négligeable devant tout terme de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ coincé entre $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n}\cdot$ Plus précisément :

$$\frac{\frac{(\ln n)^{10}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{(\ln n)^{10}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(croissances comparées usuelles), donc $\dfrac{(\ln n)^{10}}{n^2} = o(1/n^{3/2})$, et par comparaison **à une série à termes positifs** convergente :

$$\boxed{\sum \frac{(\ln n)^{10}}{n^2} \text{ est convergente.}}$$

(c) Comme plus haut (mais dans l'autre sens) $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}}$ (ce qui ne permet pas de dire grand chose), mais si on coince γ entre $1/2$ et 1, alors $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$:

$$\frac{\frac{1}{n^{3/4}}}{\frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}} = \frac{(\ln n)^{999}}{n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\dfrac{1}{n^{3/4}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}\right)$ or $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs (et par l'absurde comme plus haut) :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}} \text{ est divergente.}}$$

(d) On souhaite montrer :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln^2 k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}.$$

On va donc chercher à **majorer** le terme général (inutile d'encadrer à ce stade là).

L'application $x > 1 \mapsto \dfrac{1}{x \ln^2 x}$ est (calculer la dérivée !) décroissante, donc on va pouvoir utiliser une comparaison somme/intégrale. Le petit dessin usuel (que je n'ai pas sous la main ; mais gare à vous si vous ne l'avez pas fait !) nous invite à choisir $k \geqslant 3$ (attention, pas 2 !). Pour $t \in [k-1, k]$, on a $\dfrac{1}{k \ln^2 k} \leqslant \dfrac{1}{t \ln^2 t}$, inégalité qu'on peut intégrer sur $[k-1, k]$ pour obtenir :

$$\frac{1}{k \ln^2 k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t \ln^2 t}.$$

Si on prend maintenant $n \geqslant 3$ et qu'on somme l'inégalité précédente pour k allant de 3 à n, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2 \ln^2 2} \leqslant \int_{2}^{n} \frac{dt}{t \ln^2 t},$$

et c'est à cet instant qu'on comprend le sens de l'indication mystérieuse en début d'énoncé : on va effectuer le changement de variable $u = \ln t$ pour trouver :

$$S_n \leqslant \frac{1}{2 \ln^2 2} + \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Ainsi, la **suite** des sommes partielles est croissante ($S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{n \ln^2 n} \geqslant S_n$) et majorée par $\dfrac{1}{2 \ln^2 2} + \dfrac{1}{\ln 2}$ donc convergente.

$$\boxed{\sum \frac{1}{n \ln^2 n} \text{ converge.}}$$

Plutôt que le changement de variable, on pouvait aussi observer le motif $\dfrac{u'}{u^2} = (\ldots)'$.

(e) Pour $\alpha \neq 1$, on adapte ce qui précède en coinçant à chaque fois γ entre 1 et α : que α soit plus grand ou plus petit que 1, $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$ constitue un bon candidat (on a bien entendu fait deux dessins...). C'est ainsi qu'on le fixe pour la suite.

— Si $\alpha > 1$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$ (évaluer le rapport et noter que $\gamma < \alpha$) et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est convergente, donc par comparaison gnagnagna, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente.

— Si $\alpha < 1$, on a cette fois $\gamma > \alpha$, donc $\dfrac{1}{n^\gamma}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, or $\gamma < 1$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est divergente, et il en va de même pour $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

— Supposons maintenant $\alpha = 1$.

— Si $\beta > 1$, alors comme dans le cas $\beta = 2$, on obtient par une comparaison somme/intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n \ln^\beta n} &\leqslant \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \int_{2}^{n} \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}} \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}} \end{aligned}$$

donc par croissance/majoration de la suite des sommes partielles, $\sum \dfrac{1}{n (\ln n)^\beta}$ est convergente.

— Si $\beta < 1$, on va cette fois **minorer** les sommes partielles (et je passe les détails) en se concentrant pour bien manipuler à nouveau des quantités positives telles que $1-\beta$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln^{\beta} n} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\ln^{\beta} t} = \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où la divergence de $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$.

— Le cas $\beta = 1$ se traite de la même façon que le cas précédent, à un détail près : le calcul de l'intégrale fait apparaître la minoration :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln n} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et on conclut de la même façon quant à la divergence de $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$.

Finalement :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$$

2. (a) On ne va plus se contenter d'une **minoration** des sommes partielles mais d'un **encadrement** de $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}$. Les techniques précédentes nous fournissent :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \int_2^{n} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$$

c'est-à-dire :

$$2\sqrt{\ln(n+1)} - 2\sqrt{\ln 2} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + 2\sqrt{\ln n} - 2\sqrt{\ln 2} \qquad (E)$$

Notons respectivement g_n et d_n le minorant et le majorant dans l'encadrement précédent. Il est clair que $d_n \sim 2\sqrt{\ln n}$. Pour le membre de gauche, ça l'est à peu près... mais on va tout de même le préciser (en ne s'occupant pas de la constante qui est négligeable devant le terme tendant vers $+\infty$) :

$$\sqrt{\ln(n+1)} = \sqrt{\ln n + \ln(1+1/n)} = \sqrt{\ln n}\sqrt{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{\ln n}}} \sim \sqrt{\ln n}.$$

Si maintenant on reprend (E) et qu'on divise chaque terme par le candidat équivalent $2\sqrt{\ln n}$ on trouve :

$$\frac{g_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{d_n}{2\sqrt{\ln n}},$$

et d'après ce qui précède les termes extérieurs tendent vers 1, donc les gendarmes nous assurent qu'il en va de même pour le terme central, et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}} \sim 2\sqrt{\ln n}}$$

(b) Si $\alpha \in]0,1[$, on reprend exactement la technique précédente pour trouver :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

On vérifie bien entendu la cohérence de cette formule avec le cas $\alpha = 1/2$...

(c) Fixons deux entiers n et N tels que $3 \leqslant n \leqslant N$. On obtient alors par comparaison somme/intégrale :

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t\ln^2 t} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{dt}{t\ln^2 t}.$$

Le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{1}{\ln(N+1)}$ et celui de droite vaut $\dfrac{1}{\ln(n-1)} - \dfrac{1}{\ln(N)}$. Lorsque N tend vers $+\infty$, les trois termes de l'encadrement possèdent une limite ; on peut donc passer ledit encadrement à la limite en N pour obtenir :

$$\frac{1}{\ln n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \frac{1}{\ln(n-1)}.$$

Les membres extérieurs de cet encadrement sont équivalents, donc en gendarmisant comme plus haut après division par le candidat équivalent, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \sim \frac{1}{\ln n}.}$$

(d) C'est bien entendu la même chose. Il faut juste avoir assez de forces/lucidité pour pouvoir manipuler le paramètre α On trouvera :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}}.}$$

On vérifie bien entendu la cohérence de cette formule avec le cas $\alpha = 2$.

(e) Encore une comparaison somme/intégrale pour obtenir un encadrement des sommes partielles ; on trouve finalement :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)} \sim \ln(\ln n).}$$

