# Quelques calculs en algèbre linéaire

## 1 Une matrice à inverser

On procède comme suggéré dans l'énoncé.
*Les adeptes d'une méthode magique, qu'ils l'aient comprise ou non, sont habilités à l'utiliser !*
Résolvons donc $MX = Y$... en pivotant et sans la moindre fantaisie :

$$MX = Y \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = y_2 \\ -x_1 + 4x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 + y_1 \\ -2x_2 - x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4y_1 + 8y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - x_3 = -y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

*(La dernière étape se réalise du bas vers le haut.)*
On obtient donc quelque chose comme $MX = Y \iff X = NY$, et comme $Y$ était quelconque, on a prouvé pour le même prix :

$$\boxed{M \text{ est inversible, d'inverse } M^{-1} = N = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

## 2 Des systèmes linéaires

**1)** Tentons une méthode originale en pivotant... Les opérations élémentaires sont celles imposées par le pivot : aucune fantaisie n'est acceptée ! Par exemple à la première étape on réalise les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.
*J'insiste sur le fait que si vous faites autre chose, ce n'est pas « un point de vue différent » : c'est une méconnaissance du pivot de Gauss. Et probablement pas à la marge.*
Pour la deuxième étape on a le choix entre $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5}L_2$ et $L_4 \leftarrow 5L_4 - L_2$ : c'est cette deuxième option que j'ai prise.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 3x + y + z - t = 6 \\ 2x - y + z + 2t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ -5y - 8z - 10t = 9 \\ -5y - 5z - 4t = 3 \\ -y - 2z - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ -5y - 8z - 10t = 9 \\ 3z + 6t = -6 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 - 2y - 3z - 3t = 1 \\ y = -\frac{1}{5}(9 + 8z + 10t) = -1 \\ t = \frac{1}{6}(-6 - 3z) = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

*(La dernière étape s'écrit et se lit de haut en bas.)*
Et ainsi, ce système possède une unique solution :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1, -1, 2, -2)\}}$$

**2)** Et si on pivotait ?

$$\begin{cases} -x & + & (1+\lambda)y & = & -4-\mu \\ 2x & - & \lambda y & = & 9+\mu \end{cases} \iff \begin{cases} -x & + & (1+\lambda)y & = & -4-\mu \\ & & (2+\lambda)y & = & 1-\mu \end{cases}$$

Discutons :

(a) Si $\lambda \neq -2$, on a un brave système triangulaire, qui possède pour unique solution :

$$\begin{cases} x &= (1+\lambda)y + 4 + \mu = \cdots = \dfrac{9+5\lambda+\mu}{2+\lambda} \\ y &= \dfrac{1-\mu}{2+\lambda} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{9+5\lambda+\mu}{2+\lambda}, \frac{1-\mu}{2+\lambda} \right) \right\}}$$

(b) Si $\lambda = -2$ : la seconde équation est : $0 = 1 - \mu$. Ainsi :

— Si $\mu \neq 1$, alors le système ne possède pas de solution.

— Si $\mu = 1$, le système est équivalent à la simple équation $-x - y = -5$. Il possède donc une infinité de solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(5-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.}$$

**3)** Pour que la copie ne soit pas déchirée, on va bien entendu pivoter : les opérations sont les mêmes que pour la résolution du système de la première question, et conservent le rang :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 4}$$

*Avec un peu de recul, la résolution du premier système nous donnait directement ce résultat...*

**4)** L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ nous dit que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda \\ 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$ donc :

— Si $\lambda = -2$ alors $B$ est de rang 1.

— Si $\lambda \neq -2$ alors $B$ est de rang 2.

**5)** Pour $A$ on pivote comme on l'a déjà vu deux fois, sachant que dès qu'une colonne ne possède qu'une seule valeur non nulle, on développe par rapport à cette colonne, ce qui nous ramène à la dimension inférieure :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & -10 \\ -5 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -5 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-5)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

*À la troisième étape on a réalisé l'opération $L_3 \leftarrow 5L_3 - L_1$ qui multiplie le déterminant par 5, d'où le facteur $1/5$ puisque* $\det(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{5}\det(L_1, L_2, 5L_3) = \frac{1}{5}\det(L_1, L_2, 5L_3 - L_1)$.

$$\boxed{\det(A) = -12}$$

Pour $B$, on réalise le même pivot que pour le calcul de son rang, et on trouve :

$$\boxed{\det(B) = -(2+\lambda)}$$

# 3 Deux polynômes caractéristiques

Pour le premier déterminant, on développe bien entendu par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(\lambda I_3 - C) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\underbrace{((\lambda-2)(\lambda+1)+3)}_{=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)}$$

$$\boxed{\det(\lambda I_3 - C) = \lambda(\lambda-1)^2}$$

Pour le deuxième j'ai tout de suite développé par rapport à la première colonne. On aurait aussi pu faire une étape de pivot en se reposant sur le $-1$ en position $(1,3)$ : $C_1 \leftarrow C_1 + (\lambda-2)C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - 3C_3$.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - D) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -1 \\ 0 & \lambda+4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\underbrace{((\lambda+4)(\lambda-5)+24)}_{=\lambda^2-\lambda+4} - 4\underbrace{(-6+(\lambda+4))}_{=\lambda-2} \\ &= (\lambda-2)\underbrace{\big((\lambda^2-\lambda+4)-4\big)}_{=\lambda^2-\lambda} = (\lambda-2)\lambda(\lambda-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\det(\lambda I_3 - D) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

# 4 Un hyperplan

**1)** Il suffit de vérifier que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est de rang 3 :

$$\dim(H) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -10 \\ 4 & 8 & -15 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

(on a choisi de pivoter sur les colonnes, mais on aurait pu tout aussi bien choisir les lignes ; on a par ailleurs fait des dilatations de colonnes pour y voir plus clair). Ainsi, $H$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 :

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^4.}$$

**2)** Un vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ si et seulement si le rang de la famille $\mathcal{G} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{v})$ vaut 3. Or, en adaptant le calcul précédent :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{G}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & -3 & 2 & z \\ 4 & 4 & 1 & t \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & y-2x \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -3 & t-4x \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -1 & t-2y \end{pmatrix}$$

Ce rang vaut 3 si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z-3x \\ t-2y \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $2(t-2y) = z-3x$ : on tient notre condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{v}$ soit dans $H$.

$$\boxed{H \text{ est le noyau de la forme linéaire } \varphi : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto -3x+4y+z-2t.}$$

**3)** $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$ n'est pas dans $H$ (il n'est pas dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$), donc $\mathbb{R}e_1$ constituera un supplémentaire pour $H$ (intersection et dimensions...).

$$\boxed{\text{La droite engendrée par } (1,0,0,0) \text{ constitue un supplémentaire de } H.}$$

**4)** $\overrightarrow{f} = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ si et seulement si $\mathcal{H} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f}\right)$ est de rang 2. On calcule donc le rang par opérations élémentaires :

$$\text{rg}(\mathcal{H}) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \\ 4 & 4 & t \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & y-2x \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-4x \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-2y \end{pmatrix}$$

ce rang vaut 2 si et seulement si $z - 3x = 0$ et $t - 2y = 0$.

$$\boxed{(x, y, z, t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \text{ si et seulement si } 3x = z \text{ et } 2y = t.}$$

*On note que $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ vérifient effectivement ces conditions ! C'est rassurant...*

**5)** Les habitants de $\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g})$ sont les éléments de $E$ qui s'écrivent sous la forme $\alpha\overrightarrow{f_3} + \beta\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 4\alpha - \beta \\ 3\alpha - 5\beta \\ 2\alpha + 7\beta \\ \alpha - 5\beta \end{pmatrix}$ tout en respectant les équations de $\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ établies à la question précédente, ce qui revient ici (faire les calculs !) à $\alpha = \beta$. On a donc :

$$\boxed{\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g}) = \text{Vect}(\overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{g}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

# 5 Supplémentaires, extraction, complétion

**1)** On pivote sur les colonnes de la matrice représentant initialement les trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. À chaque étape, les colonnes représentent encore (dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$) une famille génératrice de l'espace engendré par les trois vecteurs initiaux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors [1] après ces deux étapes que le troisième vecteur était combinaison linéaire des deux précédents, et que pour trouver une base de $\mathbb{R}^5$, il suffit de compléter les deux premiers par $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$ (éléments usuels de la base canonique ; on a alors une matrice triangulaire).

$$\boxed{\text{Un supplémentaire du sous-espace proposé est } \text{Vect}(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}).}$$

**2)** Même principe que dans la question précédente : on représente les polynômes dans la base canonique, et on pivote sur les colonnes. On continue donc de représenter des combinaisons linéaires de ces vecteurs dans la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après deux étapes, on voit que $P_3$ est combinaison linéaire de $P_1$ et $P_2$, que $(P_1, P_2, P_4)$ est libre (et constitue donc une base de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$, soit encore une famille libre maximale) et peut être complétée en une base de $G$ en ajoutant $X^2$ et $X^4$.

$$\boxed{(P_1, P_2, P_4) \text{ est une sous-famille libre maximale de } \mathcal{F}, \text{ et } (X^2, X^4) \text{ la complète en une base de } G.}$$

1. Si on a bien compris le sens des opérations élémentaires : que représentent les différentes colonnes ?

# 6 Des noyaux et images

**1)** Que l'on s'intéresse au déterminant , au rang, ou au caractère échelonné...

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

**2)** Mêmes attaques que pour la question précédente !

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3, -1\}}$$

*Vous pourrez bientôt dire que « pour une matrice triangulaire, le spectre se lit sur la diagonale ».*

**3)** Pour cette question, il s'agit de calculer le rang de matrices triangulaires échelonnées : c'est normalement instantané !

| $\lambda$ | 2 | 3 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{rg}(A - \lambda I_7)$ | 5 | 6 | 6 |

**4)** Inspiré par la question précédente, on commence par calculer les rangs, donc les dimensions des noyaux (théorème du rang), et à chaque fois, on trouve le bon nombre de vecteurs de la base canonique qui ont le bon goût d'appartenir à ce noyau !

| $\lambda$ | 2 | 3 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7))$ | 2 | 1 | 1 |
| $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^2)$ | 2 | 2 | 2 |
| $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^3)$ | 2 | 2 | 3 |
| $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^4)$ | 2 | 2 | 3 |

Ensuite, les noyaux vont stagner.
Pour les (des) bases :

| $\lambda$ | 2 | 3 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)$ | $(e_1, e_2)$ | $e_3$ | $e_5$ |
| $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^2$ | $(e_1, e_2)$ | $(e_3, e_4)$ | $(e_5, e_6)$ |
| $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^3$ | $(e_1, e_2)$ | $(e_3, e_4)$ | $(e_5, e_6, e_7)$ |
| $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_7)^4$ | $(e_1, e_2)$ | $(e_3, e_4)$ | $(e_5, e_6, e_7)$ |