Préparation à la réduction

À rendre le mardi 3 novembre 2026 dernier délai (le lundi 2 dans mon casier, c'est mieux).

La première partie du DM (deux premiers exercices) est essentiellement technique : les calculs de « polynômes caractéristiques » et de « sous-espaces propres » devront être faits de façon fluide et « sans trop avoir à réfléchir » très bientôt. Les 3/2 rédigeront les deux premiers exercices, et sont invités à chercher les deux autres exercices, sans forcément les rédiger au propre (mais les rédiger au brouillon peut être intéressant). Les 5/2 chercheront et rédigeront les deux derniers exercices.

1 Des polynômes caractéristiques

Pour chacune des matrices suivantes, disons $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer le polynôme caractéristique, c'est-à-dire la valeur, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, de $\det(\lambda I_n - M)$. Déterminer ensuite les racines de ce polynôme (les « valeurs propres »).

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 60 \\ -5 & -18 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ i & 1-i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_2 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix}$$

Pour B on se contentera de prouver qu'il y a deux valeurs propres distinctes, sans les expliciter. Et pour H, inutile de chercher les racines de ce polynôme trop général !

2 Des sous-espaces propres

Pour chacune des matrices M parmi A, C et D et pour chaque valeur propre λ de M, déterminer le sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$, où u est l'application linéaire canoniquement associée à M.
Pour chacune de ces 3 matrices/endomorphismes, dire si la somme (directe) des sous-espaces propres est égale à l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$ (on dit alors que la matrice M – ou l'endomorphisme u – est *diagonalisable*).

On montrera de plus que pour B la somme vaut $\mathbb{C}^2$ sans expliciter les sous-espaces propres.

3 Polynômes de Hilbert

On définit $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

1) Exprimer $H_{15}(20)$ à l'aide d'un coefficient binomial. Même chose pour $H_{15}(-10)$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(p) \in \mathbb{Z}$.

3) Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(a) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $P(p) \in \mathbb{Z}$.

(b) Il existe $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_n H_n$.

Pour $(a) \Rightarrow (b)$, on pourra partir d'une décomposition de P selon les H_i, et évaluer en 0, puis 1, etc...

4 Polynômes de Tchebychev

1) Soit $n \geqslant 1$. On note $A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

(a) Calculer A_n et B_n pour $n \in [\![1, 4]\!]$.

(b) Que vaut $A_n + B_n$? Et $A_n - B_n$?

(c) En déduire la valeur de A_n et celle de B_n.

2) (a) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(3\theta) = \sin\theta P(\cos\theta)$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme U_n à coefficients entiers tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left((n+1)\theta\right) = \sin\theta U_n(\cos\theta).$$

Pour l'existence, on partira de la relation $\mathrm{e}^{(n+1)i\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^{n+1}$ *et en développant le membre de droite on précisera quels termes de la somme sont réels et lesquels sont imaginaires purs. Pour l'unicité, on ne se contentera pas d'agiter les bras : on la prouvera vraiment.*

(c) En transformant en produit la somme $\sin\left((n+2)\theta\right) + \sin n\theta$, établir **soigneusement**, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence liant U_{n-1}, U_n et U_{n+1}.
BIEN ENTENDU, on ne demande pas une relation entre $U_{n-1}(17)$, $U_n(17)$ *et* $U_{n+1}(17)$, *ou encore* $U_{n-1}(\cos\theta)$, $U_n(\cos\theta)$ *et* $U_{n+1}(\cos\theta)$, *mais une relation entre* U_{n-1}, U_n *et* U_{n+1}. *En plus on demande de la prouver autrement qu'en agitant les bras...*

(d) Déterminer U_n pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

(e) Déterminer soigneusement le degré et le coefficient dominant de U_n. Etudier la parité de U_n.

3) On va ici calculer les coefficients de U_n en passant par une équation différentielle.

(a) En partant de la relation «fondatrice» vérifiée par U_n, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1 - X^2)U_n'' - 3XU_n' + n(n+2)U_n = 0. \tag{E_n}$$

(b) Justifier l'existence d'entiers $a_{n,k}$ tels que :

$$U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,k} X^{n-2k}.$$

(c) Déterminer les coefficients de X^n et X^{n-2} quand on développe le membre de gauche de (E_n). Donner les valeurs de $a_{n,0}$ et $a_{n,1}$.

(d) Sur le même principe, trouver une relation de récurrence vérifiée par les $a_{n,k}$. En déduire la valeur de $a_{n,2}$ puis des $a_{n,k}$.