Préparation à la réduction

À rendre le mardi 3 novembre 2026 dernier délai (le lundi 2 dans mon casier, c'est mieux).

1 Des polynômes caractéristiques

1) Tout d'abord :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & -60 \\ 5 & \lambda + 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 17)(\lambda + 18) + 300 = \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \text{ et donc } \mathrm{Sp}(A) = \{2, -3\}}$$

2) On trouve directement :

$$\chi_B(\lambda) = \cdots = \lambda^2 - 3\lambda + 4 - i$$

Ce polynôme (on se comprend) possède pour discriminant $\Delta = \cdots = -7 + 4i$. Puisque ce complexe est non nul, il est le carré d'un autre complexe $\delta \neq 0$. Les racines de χ_B sont alors $\dfrac{3 \pm \delta}{2}$:

$$\boxed{\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 4 - i \text{ possède deux racines distinctes.}}$$

3) Le calcul de χ_C va se faire en choisissant un pivot raisonnable : $\lambda + 3$ n'est pas un tel pivot. Je propose le 1 situé en bas à gauche. On réalise alors les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - (\lambda + 3)L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$. On développe ensuite par rapport à la première colonne, puis on factorise (c'est l'objectif final !) une chose que l'on voit sur la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 4 & -10 \\ 2 & \lambda + 5 & -10 \\ 1 & 4 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4(\lambda + 2) & -\lambda^2 + 5\lambda + 14 \\ 0 & \lambda - 3 & 6 - 2\lambda \\ 1 & 4 & \lambda - 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4(\lambda + 2) & -\lambda^2 + 5\lambda + 14 \\ \lambda - 3 & 6 - 2\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} -4(\lambda + 2) & -\lambda^2 + 5\lambda + 14 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3) \underbrace{\big(8(\lambda + 2) - \big(-\lambda^2 + 5\lambda + 14\big)\big)}_{= \lambda^2 + 3\lambda + 2} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_C(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1) \text{ donc } \mathrm{Sp}(C) = \{3, -1, -2\}}$$

4) Mêmes principes que pour le calcul précédent, mais on va pouvoir factoriser $\lambda - 2$ sur deux lignes :

$$\chi_D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda - 4 & -\lambda^2 + 2\lambda \\ 0 & \lambda - 2 & 2 - \lambda \\ 1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-2 + \lambda}$$

$$\boxed{\chi_D(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \text{ donc } \mathrm{Sp}(D) = \{2\}}$$

5) Pas très sympa ce déterminant. Prenons le moins mauvais pivot : en haut à droite il permettra de faire apparaître gratuitement un zéro en position $(2, 3)$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. L'opération $L_3 \leftarrow 3L_3 - (\lambda + 1)L_1$ va multiplier le déterminant par 3 (d'où la factorisation par $1/3$), qui sera tout de

suite neutralisée lors du développement selon la troisième colonne (le calcul qui suit n'a d'intérêt que si vous le faites partiellement : je zappe des passages !) :

$$\chi_E(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & 3 \\ -4 & \lambda+2 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \lambda-6 & 4 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -3+5\lambda-\lambda^2 & 5-4\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3+5\lambda-\lambda^2 & 5-4\lambda \end{vmatrix}}_{-(5-4\lambda)-(-3+5\lambda-\lambda^2)}$$

et puisque $\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)$:

$$\boxed{\chi_E(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) \text{ donc } \mathrm{Sp}(E) = \{2,-1\}}$$

6) Ici, on peut raisonnablement développer par rapport à la première colonne, qui contient un zéro :

$$\chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -1 \\ 0 & \lambda+4 & 2 \\ -4 & -12 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\underbrace{\big((\lambda+4)(\lambda-5)+24\big)}_{\lambda^2-\lambda+4} - 4\underbrace{\big(-6+(\lambda+4)\big)}_{\lambda-2}$$

soit finalement :

$$\boxed{\chi_F(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \text{ donc } \mathrm{Sp}(F) = \{0,1,2\}}$$

7) Face à ce type de matrice vous pourrez bientôt dire : *« le spectre d'une matrice triangulaire se lit sur la diagonale »*. De fait, le calcul du polynôme caractéristique est instantané puisqu'il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire, donc qui est égal au produit des termes diagonaux.

$$\boxed{\chi_G(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) \text{ donc } \mathrm{Sp}(G) = \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}}$$

Si les λ_i ne sont pas distincts, le spectre sera de cardinal 2 voire 1.

8) Il serait raisonnable de choisir une ligne/colonne avec beaucoup de zéros ou bien de pivoter par exemple par rapport à la deuxième ligne via $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$... mais très exceptionnellement, choisissons la colonne avec le moins de zéros ! Chacun des déterminants qui suivra se calcule très bien !

$$\begin{aligned} \chi_H(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+a_3 \end{vmatrix} \\ &= -a_0\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-1} + a_1\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\lambda} - a_2\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-\lambda^2} + (\lambda+a_3)\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}}_{\lambda^3} \end{aligned}$$

Surprenant non ?

$$\boxed{\chi_H(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \lambda^4}$$

2 Des sous-espaces propres

1) Pour $A : \mathrm{Mat}(u-2\mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (deux colonnes/lignes proportionnelles, ou un tour de pivot), donc est non inversible, donc $u-2\mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective donc pas injective. Plus précisément, le noyau de $u-2\mathrm{Id}_E$ est de dimension $2-1=1$, et contient visiblement $f_1=(-4,1)$ puisque $\begin{pmatrix} 15 & 60 \\ -5 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (autre point de vue : la matrice de $v = u-2\mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathcal{E}$ nous indique que $v(e_2) = 4v(e_1)$, donc $v(e_2-4e_1)=0$... et si on ne voit vraiment rien, on résout $(A-2I_2)X=0$).

$$\boxed{\text{Ker}\,(u-2\text{Id}_E) = \text{Vect}(f_1), \text{ avec } f_1 = (-4,1).}$$

De la même façon, $\text{Mat}(u+3\text{Id}_E, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 20 & 60 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\text{Ker}\,(u+3\text{Id}_E) = \text{Vect}(f_2), \text{ avec } f_2 = (-3,1).}$$

J'ai laissé ici la rédaction de « celui qui regarde, puis voit ». Si on ne voit rien (par exemple si on ne regarde pas...), on doit être capable de déterminer les sous-espaces propres en résolvant un système linéaire sans la moindre fantaisie ou initiative malheureuse. Pour $\lambda = 2$, voilà ce que ça donne :

Soit $f = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (vous savez que si vous avez fixé f dans $\text{Ker}\,(u-2\text{Id})$ c'est fichu d'avance, n'est-ce pas ?)

Notons donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle A représente u :

$$f \in \text{Ker}\,(u-2\text{Id}) \iff (A-2I_2)X = 0 \iff \begin{cases} 15x & + & 60y & = & 0 \\ -5x & - & 20y & = & 0 \end{cases} \iff x+4y=0 \iff x = -4y$$

ainsi $\text{Ker}\,(u-2\text{Id}) = \{(-4y,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(f_1)$ avec $f_1 = (-4,1)$.

2) Pour B : on se fiche de la valeur précise des valeurs propres distinctes, disons λ_1 et λ_2. Chaque espace propre est le noyau d'un endomorphisme non bijectif (pourquoi ?) mais également non nul (pourquoi ?) donc de rang 1. On est donc face à deux droites distinctes (pourquoi ?), donc supplémentaires.

$$\boxed{\mathbb{C}^2 = \text{Ker}\,(u-\lambda_1\text{Id}) \oplus \text{Ker}\,(u-\lambda_2\text{Id}) : u \text{ (mais aussi } B\text{) est diagonalisable.}}$$

3) Pour C : à chaque fois on prend $f = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et on définit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

— Pour $\lambda = 3$: une fois sous forme de système on a l'audace de placer la dernière équation en première position et même de prendre son opposé, histoire d'avoir un pivot très civilisé. La remontée du système qui conclut la résolution se fait comme toujours de bas en haut comme son nom l'indique !

$$f \in \text{Ker}\,(u-3\text{Id}) \iff (C-3I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -6x-4y+10z & = & 0 \\ -2x-8y+10z & = & 0 \\ -x-4y+5z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & 4y & - & 5z & = & 0 \\ & & 20y & - & 20z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -4y+5z = z \\ y & = & z \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}\,(u-3\text{Id}) = \{(z,z,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$.

$$\boxed{\text{Ker}\,(u-3\text{Id}) = \text{Vect}(f_1) \text{ avec } f_1 = (1,1,1)}$$

— Pour $\lambda = -1$: on peut voir (deux lignes égales, deux non colinéaires) que le rang de $C+I_3$ est 2 donc le noyau sera une droite. De façon succincte (avec à nouveau le pivot qui va bien dès le début et en notant que deux lignes sont égales) :

$$f \in \text{Ker}\,(u+\text{Id}) \iff \begin{cases} x+4y-9z & = 0 \\ -2x-4y+10z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y-9z = 0 \\ 4y-8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4y+9z = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ker}\,(u+\text{Id}) = \text{Vect}(f_2) \text{ avec } f_2 = (1,2,1)}$$

— Pour $\lambda = -2$:

$$f \in \operatorname{Ker}(u+2\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} -x-4y+10z &= 0 \\ -2x-3y+10z &= 0 \\ -x-4y+10z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y-10z=0 \\ 5y-10z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-4y+10z=2z \\ y=2z \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u+2\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(f_3) \text{ avec } f_3 = (2,2,1)}$$

Les 5/2 savent que les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, donc peuvent annoncer dès maintenant que la somme (donc directe !) de ces trois droites est de dimension 3, donc égale à $\mathbb{R}^3$ et ainsi :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

Les 3/2 auront certainement établi que le rang de (f_1, f_2, f_3) vaut 3, donc cette famille constitue une base de $\mathbb{R}^3$, donc les sous-espaces engendrés par ces trois vecteurs sont de somme directe égale à $\mathbb{R}^3$.

4) Pour D : il y a une seule valeur propre, donc un seul sous-espace propre : $\operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id})$. En ouvrant les yeux on peut voir que la matrice $D - 2I_4$ est de rang 1 donc que le noyau est de dimension $3-1=2$; et puisque $C_2 = -2C_1$ et $C_1 = C_3$ (par exemple) on trouve facilement deux vecteurs non colinéaires du noyau, en constituant donc une base : $(2,1,0)$ et $(1,0,-1)$. Mais si on ne le voit pas ce n'est pas grave : en pivotant dans la résolution de $(u-2\mathrm{Id})(f) = 0$ on trouve directement que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 = (2,1,0) \text{ et } f_2 = (1,0,-1) \text{ donc } u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

3 Polynômes de Hilbert

1) Directement :

$$\boxed{H_{15}(20) = \tbinom{20}{15} \text{ et } H_{15}(-10) = -\tbinom{24}{15} = -\tbinom{24}{9}.}$$

2) On s'inspire évidemment de la question précédente [1] : soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \geqslant n$, alors $H_n(p) = \binom{p}{n}$. Si $0 \leqslant p < n$, alors $H_n(p) = 0$, et si $p < 0$, alors $H_n(p) = (-1)^n \binom{n-p-1}{n}$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, } H_n(p) \in \mathbb{Z}.}$$

3) Ce qui est en général clair dans votre tête à l'issue du programme de première année c'est que lorsque $(P_0, ..., P_n)$ est échelonnée en degrés ($\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$), alors cette famille constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Mais est-ce qu'on peut généraliser à une famille infinie ?

— Oui : si pour tout $k \in \mathbb{N}$ P_k est de degré k, alors $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

— Le statut de ce résultat est peu clair dans les programmes de première année.

— La liberté s'établit en partant d'une combinaison linéaire nulle : même si la famille initiale est infinie, chaque combinaison linéaire est une somme finie, donc on est ramené à un $\mathbb{R}_N[X]$. De même, le caractère générateur s'établit en fixant $P \in \mathbb{R}[X]$ et en notant qu'il est dans $\mathbb{R}_N[X]$, où N est son degré...

Ici bien entendu ce résultat s'applique (chaque H_n est de degré n, y compris pour $n = 0$).

$$\boxed{(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

1. Quoi, il y avait un rapport ? Ben oui...

4) Bien sûr, l'un des deux sens ne pose pas trop de problème... Supposons donc que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $P(p) \in \mathbb{Z}$. On sait alors qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_n H_n$. On veut montrer que les λ_i sont dans $\mathbb{Z}$. En évaluant la combinaison linéaire en 0, on obtient $P(0) = \lambda_0$ donc $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. En évaluant en 1, on obtient $P(1) = \lambda_0 + \lambda_1$ donc $\lambda_1 = P(1) - \lambda_0 \in \mathbb{Z}$. On va bien entendu récurer... mais pas sur n (P est fixé, dans cette histoire). En définissant, pour $k \in [\![0, n]\!]$, la proposition $\mathcal{P}(k)$ "$\lambda_k \in \mathbb{Z}$", l'initialisation est déjà faite. Pour le caractère héréditaire, attention, il faut supposer $\mathcal{P}(0), ..., \mathcal{P}(k)$ vérifiées (et pas seulement $\mathcal{P}(k)$) pour un certain $k \in [\![0, n-1]\!]$. En évaluant la combinaison linéaire en $k+1$, on obtient

$$\lambda_{k+1} H_{k+1}(k+1) = P(k+1) - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i H_i(k+1).$$

Comme $\lambda_0, ..., \lambda_k$ ont été supposés entiers, et comme par ailleurs $H_{k+1}(k+1) = 1$, on obtient bien $\lambda_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Ce qui prouve l'équivalence demandée.

4 Polynômes de Tchebychev

1) (a) On commence par notre triangle favori :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

On a alors sans trop de mal, en sélectionnant les termes pairs et impairs :

$$\boxed{A_1 = B_1 = 1, \qquad A_2 = B_2 = 2, \qquad A_3 = B_3 = 4, \qquad A_4 = B_4 = 8.}$$

(b) Lorsque k décrit $[\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, $2k$ décrit tous les entiers pairs entre 0 et n, et de même lorsque k décrit $[\![0, \lfloor (n-1)/2 \rfloor]\!]$, $2k+1$ décrit tous les entiers impairs entre 0 et n, donc :

$$A_n + B_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n,$$

et de même :

$$A_n - B_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = (-1+1)^n.$$

Finalement :

$$\boxed{A_n + B_n = 2^n \text{ et } A_n - B_n = 0.}$$

(c) Des relations précédentes, on doit pouvoir tirer sans trop de mal :

$$\boxed{A_n = B_n = 2^{n-1}.}$$

C'est un peu *ce à quoi on s'attendait...*

2) (a) La connaissance de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ est suffisante (mais pas forcément nécessaire...) :

$$\sin(3\theta) = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cos\theta = \sin\theta\left((2\cos^2\theta - 1) + 2\cos^2\theta\right),$$

et donc :

$$\boxed{\text{En prenant } P = 4X^2 - 1, \text{ on a } \sin(3\theta) = \sin\theta P(\cos\theta) \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On va montrer l'existence de U_n par calcul direct : pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)\theta)$ est la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{(n+1)i\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1}$, soit encore $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sin^k\theta\cos^{n+1-k}\theta$.

On notera qu'on a privilégié la puissance simple k sur le terme $i\sin\theta$ pour gérer plus facilement la question des puissances paires/impaires.

On ne s'intéresse qu'à la partie imaginaire, donc aux termes où k est impair, si bien que :

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1}(-1)^\ell \sin^{2\ell+1}\theta\cos^{n-2\ell}\theta \\ &= \sin\theta \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1}(-1)^\ell(1-\cos^2\theta)^\ell\cos^{n-2\ell}\theta.\end{aligned}$$

Si $U_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1}(-1)^\ell(1-X^2)^\ell X^{n-2\ell}$, alors $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta U_n(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Le fait que U_n soit à coefficients entiers est clair d'après l'expression précédente (et U_n est bien un polynôme car dans la somme, les $n-2\ell$ sont positifs puisque $\ell \leqslant n/2$!).

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe un autre polynôme V tel que $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta V(\cos\theta)$. On a alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta V(\cos\theta) = \sin\theta U_n(\cos\theta)$. En particulier, pour tout $\theta \in]0,\pi[$ on aura $\sin\theta \neq 0$ donc $(U_n - V)(\cos\theta) = 0$. Mais $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$, donc cos prend une infinité de valeurs entre 0 et π, donc $U_n - V$ est un polynôme qui admet une infinité de racines, donc est nul.

(c) On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin\big((n+1)\theta+\theta\big) + \sin\big((n+1)\theta-\theta\big) = 2\sin(n+1)\theta\cos\theta,$$

de sorte que :

$$\sin\theta U_{n+1}(\cos\theta) + \sin\theta U_{n-1}(\cos\theta) = 2\sin\theta\cos\theta U_n(\cos\theta).$$

Lorsque $\theta \in]0,\pi[$, on peut simplifier par $\sin\theta$, de sorte que le polynôme $U_{n+1} + U_{n-1} - 2XU_n$ admet pour racines tous les réels de la forme $\cos\theta$, où $0 < \theta < \pi$, c'est-à-dire tous les réels de $]-1,1[$, ce qui représente une infinité de racines, si bien que ce polynôme est nul :

$$U_{n-1} - 2XU_n + U_{n+1} = 0.$$

(d) Puisque $\sin\theta = \sin\theta$ (!) et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, on trouve directement :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_1 = 2X.$$

On peut calculer les suivants (et vérifier la cohérence pour U_2) grâce à la relation de récurrence vue à la question précédente :

$$U_2 = 2XU_1 - U_0 = 4X^2 - 1 \text{ (ouf !) et } U_3 = 2XU_2 - U_1 = 8X^3 - 4X.$$

(e) Chaque terme $\binom{n+1}{2\ell+1}(-1)^\ell(1-X^2)^\ell X^{n-2\ell}$ est polynomial de degré n et de coefficient dominant $\binom{n+1}{2\ell+1}$, donc U_n est de degré a priori majoré par n, mais le coefficient de X^n vaut $B_{n+1} = 2^n \neq 0$, donc :

$$U_n \text{ est de degré } n \text{ et coefficient dominant } 2^n.$$

Chaque terme de la somme est de parité celle de $X^{n-2\ell}$, c'est-à-dire celle de X^n, c'est-à-dire celle de n . Ainsi :

$$U_n \text{ est de la parité de } n.$$

Ceci est cohérent avec les premières valeurs calculées.

3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta U_n(\cos\theta)$ dérivée une fois fournit

$$(n+1)\cos((n+1)\theta) = \cos\theta U_n(\cos\theta) - \sin^2\theta U_n'(\cos\theta),$$

et une seconde dérivation nous donne

$$-(n+1)^2\sin((n+1)\theta) = -\sin\theta U_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta U_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta U_n''(\cos\theta).$$

En remplaçant $\sin((n+1)\theta)$ par $\sin\theta U_n(\cos\theta)$ puis en factorisant $\sin\theta$, on a après nettoyage :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, \qquad \sin\theta\left((1-\cos^2\theta)U_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta U_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)U_n(\cos\theta)\right) = 0.$$

Notons maintenant $\Delta = (1-X^2)U_n'' - 3XU_n' + n(n+2)U_n$. Pour $\theta\in]0,\pi[$, la relation précédente peut être simplifiée par $\sin\theta\neq 0$, fournissant $\Delta(\cos\theta) = 0$. Tous les réels de $]-1,1[$ sont donc racines du polynôme Δ, et ce dernier est donc nul. Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \qquad (1-X^2)U_n'' - 3XU_n' + n(n+2)U_n = 0.}$$

(b) Le polynôme U_n est de la parité de n et est de degré n, donc ne comporte que des termes de la forme X^{n-2k} pour $0\leqslant k\leqslant\lfloor n/2\rfloor$, d'où l'existence des $a_{n,k}$ (qui sont bien entiers) tels que l'on puisse écrire $U_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_{n,k}X^{n-2k}$.

(c) Dans (E_n), le coefficient de X^n est $-n(n-1)a_{n,0} - 3na_{n,0} + n(n+2)a_{n,0} = 0$; ce qui ne nous donne... rien ! *Cette question (ainsi que la suivante) était là pour se mettre en chauffe...*
Le coefficient de X^{n-2} dans le membre de gauche de (E_n) vaut

$$(n(n-1)a_{n,0} - (n-2)(n-3)a_{n,1}) - 3(n-2)a_{n,1} + n(n+2)a_{n,1} = n(n-1)a_{n,0} + 4na_{n,1},$$

et il est nul dans le membre de droite, donc $a_{n,1} = -\dfrac{n(n-1)}{4n}a_{n,0}$.
Le coefficient dominant de U_n a été vu plus haut : c'est 2^n. Ainsi :

$$\boxed{a_{n,0} = 2^n \text{ et } a_{n,1} = -\frac{n(n-1)}{4n}2^n = -(n-1)2^{n-2}.}$$

(d) Supposons : $1\leqslant k\leqslant\dfrac{n}{2}$. Le coefficient de X^{n-2k} dans (E_n) est donné par quatre contributions : U_n'' fournit $(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n,k-1}$, X^2U_n'' nous donne $(n-2k)(n-2k-1)a_{n,k}$, XU_n' amène $(n-2k)a_{n,k}$ et enfin U_n apporte modestement $a_{n,k}$. Comme ce coefficient est nul, on a :

$$(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n,k-1} - (n-2k)(n-2k-1)a_{n,k} - 3(n-2k)a_{n,k} + n(n+2)a_{n,k} = 0,$$

soit après nettoyage :

$$a_{n,k} = -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n+1-k)}a_{n,k-1}.$$

Puisque $a_{n,0} = 2^n$, on peut calculer les $a_{n,k}$ de proche en proche. On va calculer les premiers termes avant d'intuiter la formule puis de la prouver par récurrence sur k.

$$a_{n,1} = -\frac{n(n-1)}{4n}2^n = -(n-1)2^{n-2};$$

$$a_{n,2} = \frac{(n-2)(n-3)}{4.2(n-1)}(n-1)2^{n-2} = 2^{n-4}\frac{(n-3)(n-2)}{2},$$

et enfin :

$$a_{n,3} = -\frac{(n-4)(n-5)}{4.3(n-2)}2^{n-4}\frac{(n-3)(n-2)}{2} = -2^{n-6}\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3}.$$

On peut donc espérer montrer : $a_{n,k} = (-1)^k2^{n-2k}\binom{n-k}{k}$. *J'accepterais d'ailleurs des «on montrerait par récurrence sur k...»*
Soit donc, pour $k\in[\![0,\lfloor n/2\rfloor]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ la proposition : «$a_{n,k} = (-1)^k2^{n-2k}\binom{n-k}{k}$».

— $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée puisque $a_{n,0} = 2^n$;

— Supposons $\mathcal{P}(k)$ établie pour un certain $k \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]\!]$:

$$\begin{aligned} a_{n,k+1} &= -\frac{\big(n-2(k+1)+2\big)\big(n-2(k+1)+1\big)}{4(k+1)\big(n+1-(k+1)\big)}(-1)^k 2^{n-2k}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \\ &= (-1)^{k+1}2^{n-2(k+1)}\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(k+1)(n-k)}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \\ &= (-1)^{k+1}2^{n-2(k+1)}\frac{(n-k-1)!}{(k+1)!(n-2k-2)!} = (-1)^{k+1}2^{n-2(k+1)}\binom{n-k-1}{k+1}, \end{aligned}$$

ce qui établit $\mathcal{P}(k+1)$.

Le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour tout $k \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, et ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!], \qquad a_{n,k} = (-1)^k 2^{n-2k}\tbinom{n-k}{k}.}$$

