Psi 999 – 2026/2027 ψ **DM 6**

Un exercice de colle amélioré !

À rendre le lundi 9 novembre 2026 dans mon casier

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans tout l'exercice on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) *Réductions de A dans $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$.*

(a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
*Vous allez perdre une heure si vous vous êtes trompés, donc refaites le calcul au brouillon ! Inutile de **vérifier** votre calcul, il faut le **refaire** de façon indépendante !*

(b) Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Expliciter $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
Les trois questions suivantes sont indépendantes de la précédente !

(c) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Trigonalisable ?
On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.

(e) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = B$.

2) *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.*

(a) Donner avec une brève justification les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = i$.

(b) On suppose dans cette question que $M^3 = A$ avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On note respectivement v et w les endomorphismes de $E = \mathbb{C}^3$ canoniquement associés à M et A (on note $\mathcal{E}$ la base canonique de E).
Montrer que les sous-espaces propres de w sont stables par v. En déduire la matrice de v dans une « bonne » base à préciser, puis donner la forme nécessaire de $M = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$.

(c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) *Quelques considérations géométriques*

(a) Après avoir fait un dessin, donner la matrice de la rotation d'angle θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(b) Après avoir plissé les yeux en regardant $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, exploiter la question précédente pour trouver une puis trois matrices réelles distinctes dont le cube vaut R.

(c) Montrer que R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puis que l'équation $M^3 = R$ possède exactement 9 solutions distinctes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(d) Parmi ces 9 solutions, combien ont leur déterminant et leur trace dans $\mathbb{R}$?

(e) Combien de solutions réelles possède l'équation $M^3 = R$?

4) *Résolution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
On note maintenant $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}$ sa base canonique, et on rappelle qu'on a montré à la première question que la matrice de u (endomorphisme de E canoniquement associé à A) dans une bonne base, notée $\mathcal{F}$, vaut B.

(a) Expliciter trois matrices réelles dont le cube vaut B, puis trois solutions de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas d'expliciter complètement ces trois dernières solutions).

(b) On suppose ici que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 = A$ et on note z l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont stables par z, et en déduire l'allure de $\mathrm{Mat}(z, \mathcal{F})$.

(c) Terminer la résolution de $M^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5) Le vrai énoncé concernait l'équation $M^n = A$, avec n un entier $\geqslant 2$ (pas forcément $n = 3$).

(a) Résoudre succinctement cet exercice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (en utilisant ce qui a été fait bien entendu !). Plus précisément, on donnera le nombre de solutions.

(b) De même donner en justifiant succinctement le nombre de solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $M^n = A$.