Psi 999 – 2026/2027 ψ **DM 6 – corrigé**

1) (a) En développant selon la première colonne ça doit aller bien et sans erreur :

$$\boxed{\chi_A = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)}$$

(b) χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$ donc :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$$

Plus précisément son spectre vaut $\{1, i, -i\}$, et on cherche une matrice P de passage de la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{C}^3$ vers une base $\mathcal{G}$ (je pense aux notations à venir) de diagonalisation. En regardant la première colonne de A on note que $g_1 = e_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Pour i on s'intéresse au noyau de $A - iI_3 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$

En regardant les colonnes (C_i) on note que $C_2 + iC_3 = (1+i)e_1 = \dfrac{1+i}{1-i}C_1$ donc

$$g_2 = (1+i)e_1 - (1-i)e_2 - i(1-i)e_3 = (1+i)e_1 - (1-i)e_2 - (1+i)e_3 \in \operatorname{Ker}(A - i\,I_3)$$

De même :

$$g_3 = (1-i)e_1 - (1+i)e_2 - (1-i)e_3 \in \operatorname{Ker}(A + i\ I_3)$$

Il faut comprendre le « de même » comme : j'ai refait le calcul, ou bien j'ai noté que si $AX = \lambda X$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$

$$\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & -1+i & -1-i \\ 0 & -1-i & -1+i \end{pmatrix} \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}}$$

L'inversibilité de P vient du fait que $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ est bien une base.

(c) Puisque χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (condition *nécessaire* pour être trigonalisable, et a fortiori diagonalisable) :

$$\boxed{A \text{ n'est ni diagonalisable ni même trigonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

(d) On a déjà : $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Vect}(e_1)$ (inclusion et rang). Ensuite :

$$\operatorname{Mat}(u^2 + \mathrm{Id}_E, \mathcal{E}) = A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $u^2 + \mathrm{Id}$ est de rang 1 et a dans son noyau (de dimension $3 - 1 = 2$) e_2 et $e_1 - e_3$ donc $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(e_2, e_1 - e_3)$. Il reste à noter que ces deux sous-espaces (dont la somme des dimensions vaut 3) sont d'intersection réduite à $\{0\}$: en montrant que les trois vecteurs auxquels on pense constituent une base, ou bien en notant que quand $u(x) = x$, alors $(u^2 + \mathrm{Id})(x) = 2x$...

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)}$$

(e) On cherche une base (f_1, f_2, f_3) telle que $u(f_1) = f_1$, $u(f_2) = f_3$ et $u(f_3) = -f_2$. On va prendre $f_1 = e_1$; puis on note que les conditions requises imposent : $u^2(f_2) = -f_2$, c'est-à-dire $f_2 \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$. On peut tenter $f_2 = e_2$? On a alors $u(f_2) = e_1 - e_3$... et on prend $f_3 = e_1 - e_3 = u(f_2)$. On a alors $u(f_3) = -e_2 = -f_2$ après calcul. Il reste à noter que (f_1, f_2, f_3) est une base de E d'après la question précédente (concaténation de bases de supplémentaires).

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathcal{F} = (e_1, e_2, e_1 - e_3) \text{ la matrice de } u \text{ vaut } B.}$$

2) (a) Il s'agit de trouver UNE solution, puis de la multiplier par les racines cubiques de l'unité (1, j et j^2). On peut au choix noter que $(-i)^3 = i$, ou bien que $i = \mathrm{e}^{i\pi/2} = (\mathrm{e}^{i\pi/6})^3$.

Les solutions de $z^3 = i$ sont $-i$, $-ij = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2+2\pi/3)} = \mathrm{e}^{i\pi/6}$ et $-ij^2 = \mathrm{e}^{i(\pi+\pi/2+4\pi/3)} = \mathrm{e}^{5i\pi/6}$

(b) Puisque $\mathrm{Mat}(v^3, \mathcal{E}) = M^3 = A = \mathrm{Mat}(w, \mathcal{E})$ on a $v^3 = w$ donc $v \circ w = v \circ v^3 = v^4 = v^3 \circ v = w \circ v$ donc (c'est dans le cours !)

Les sous-espaces propres de w sont stables par v

On a vu que les sous-espaces propres de w sont $\mathrm{Vect}(g_1)$, $\mathrm{Vect}(g_2)$ et $\mathrm{Vect}(g_3)$ avec les vecteurs g_i vus plus haut. La stabilité de $\mathrm{Ker}\,(w - \mathrm{Id})$ par v nous dit alors que $v(g_1) \in \mathrm{Ker}\,(w - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(g_1)$, d'où l'existence de α tel que $v(g_1) = \alpha g_1$. Même chose pour g_2 et g_3. La matrice de v dans $\mathcal{G}$ est donc diagonale ; et puisque son cube vaut $\mathrm{Mat}(v^3, \mathcal{G}) = \mathrm{Mat}(w, \mathcal{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, les scalaires sur la diagonale ont pour cubes respectifs 1, i et $-i$. Il reste à revenir à $M = \mathrm{Mat}(v, \mathcal{E})$ grâce à la formule de changement de base.

$$M = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } \alpha \in \{1, j, j^2\},\ \beta \in \{-i, \mathrm{e}^{i\pi/6}, \mathrm{e}^{5i\pi/6}\} \text{ et } \gamma \in \{i, \mathrm{e}^{-i\pi/6}, \mathrm{e}^{-5i\pi/6}\}$$

(c) Les questions précédentes constituaient l'analyse : si $M^3 = A$ alors M est de la forme précédente. Réciproquement si M est de la forme précédente, alors $M^3 = P\,\mathrm{Diag}(1, i, -i)P^{-1} = A$, donc :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $M^3 = A$ possède exactement les $3 \times 3 \times 3 = 27$ solutions décrites plus haut.

3) (a) Je vous laisse dessiner le cercle trigonométrique, ainsi que $e_1 = (1, 0)$ qu'on a fait tourner de θ pour trouver $r(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Avec un peu de soin on dessine $r(e_2)$ et on voit que c'est $-\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$

La matrice demandée est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

(b) R est la matrice (dans la base canonique, mais dans d'autres aussi... bref) de la rotation d'angle $\pi/2$... qu'on obtient comme composée de trois rotations d'angle $\pi/6$... mais aussi d'angle $\pi/6 \pm 2\pi/3$!

Pour $\theta \in \{\pi/6, 5\pi/6, -\pi/2\}$, on a $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^3 = R$

(c) On peut noter (toujours avec des considérations géométriques !) que $R^2 = -I$ donc R possède comme polynôme annulateur le polynôme scindé à racines simples $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$... ou bien constater que $\chi_R = X^2 + 1$. Bref :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, R est semblable à $\mathrm{Diag}(i, -i)$.

Le travail fait dans la deuxième partie nous fournit à quelques virgules près 3×3 solutions distinctes de $M^3 = R$, semblables à $\mathrm{Diag}(\alpha, \beta)$ où $\alpha \in \{-i, \mathrm{e}^{i\pi/6}, \mathrm{e}^{5i\pi/6}\}$ et $\beta \in \{i, \mathrm{e}^{-i\pi/6}, \mathrm{e}^{-5i\pi/6}\}$.

$M^3 = R$ possède exactement 9 racines distinctes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(d) Quand α et β sont sur le cercle trigonométrique, pour avoir $\alpha\beta$ dans $\mathbb{R}$ (donc égal à ± 1) il est nécessaire et suffisant d'avoir $\beta = \pm\overline{\alpha}$.

— Le cas $\beta = \overline{\alpha}$ nous donne 3 possibilités (qui ont bien leur trace réelle).

— Si $\beta = -\overline{\alpha}$ alors la trace vaut $2i\,\mathrm{Im}\,(\alpha) \notin \mathbb{R}$ car ici $\alpha \notin \mathbb{R}$, ce qui est exclu.

Des 9 solutions précédentes, seulement 3 ont leur trace et leur déterminant dans $\mathbb{R}$.

(e) Pour qu'une matrice complexe soit réelle il est nécessaire que son déterminant et sa trace soient dans $\mathbb{R}$ (mais à peine suffisant !). L'équation $M^3 = R$ possède donc **au plus** 3 solutions réelles. Mais on peut effectivement en construire 3 d'après la question 3.b ; ainsi :

L'équation $M^3 = R$ possède exactement trois solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4) (a) Si on a bien compris ce qu'on a fait dans la partie précédente...

Pour $\theta \in \{\pi/6, 5\pi/6, -\pi/2\}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^3 = B$

Et bien entendu en notant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ de 1.e :

Quand N décrit les trois matrices précédentes, $Q\,NQ^{-1}$ décrit trois solutions réelles de $M^3 = A$

(b) Successivement : $z^3 = u$, puis $z \circ u = u \circ z$, donc le sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ est stable par z, mais on montre qu'il en va de même pour $\mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$. Prenons donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$. On veut montrer que $z(x)$ appartient aussi à ce noyau. Calculons donc :

$$(u^2 + \mathrm{Id}_E)\,(z(x)) = \big((u^2 + \mathrm{Id}_E) \circ z\big)\,(x) = \big(z \circ (u^2 + \mathrm{Id}_E)\big)\,(x) = z\,\big((u^2 + \mathrm{Id}_E)(x)\big) = 0$$

ce qui est le résultat souhaité.

$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{Id}_E)$ sont stables par z

Si on a bien compris le théorème 1-2-3-4-5, on en déduit que $\mathrm{Mat}(z, \mathcal{F})$ est diagonale par bloc :

$\mathrm{Mat}(z, \mathcal{F})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$

(c) Analyse : si $M^3 = A$ avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Mat}(z, \mathcal{F})$ est de la forme (par blocs) $\mathrm{Diag}(a, S)$ avec $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et de plus $a^3 = 1$ et $S^3 = R$. On a donc $a = 1$ (on est dans $\mathbb{R}$!) et S est l'une des trois matrices vues à la fin de la partie 3, puis $M = Q\,\mathrm{Diag}(a, S)Q^{-1}$.
Synthèse : réciproquement si $M = Q\,\mathrm{Diag}(1, S)Q^{-1}$ avec S l'une des trois matrices vues à la fin de la partie 3, alors $M^3 = Q\,\mathrm{Diag}(1, S^3)Q^{-1} = Q\,\mathrm{Diag}(1, R)Q^{-1} = A$

L'équation $M^3 = A$ possède exactement 3 solutions réelles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

5) (a) Ce qui change : les équations $z^n = 1$, $z^n = i$ et $z^n = -i$ possèdent n solutions complexes. Tout le reste est identique.

L'équation $M^n = A$ possède n^3 solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(b) Ce qui change : l'équation $a^n = 1$ possède une solution si n est impair, mais 2 si n est pair (1 et -1). Pour les matrices de rotation, on en trouve n (les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ où k décrit $[\![0, n-1]\!]$). Mais parmi les n^2 solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de $M^n = R$, seules n ont un déterminant et une trace dans $\mathbb{R}$: ce sont donc ces n matrices de rotation.

L'équation $M^n = A$ possède $2n$ solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si n est pair ; n sinon.