CCS TSI MATHS2 2021

Rémi Crétois, Thierry de Rago, Michel Sortais

version du 26 avril 2021

I Commutant d'une matrice

I.A Propriétés générales

Q 1. — $I_n \in C_A$ car la matrice identité commute avec toute matrice, C_A est donc non vide.
— Soient M_1 et M_2 deux matrices de C_A et soit λ un réel, alors :

$$\begin{aligned}(\lambda M_1 + M_2)A &= \lambda M_1 A + M_2 A \\ &= \lambda A M_1 + A M_2 \text{ car } (M_1, M_2) \in C_A^2 \\ &= A(\lambda M_1 + M_2)\end{aligned}$$

Donc C_A est stable par combinaison linéaire.
En conclusion, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 2. Soient M et N deux matrices de C_A, alors :

$$\begin{aligned}MNA = M(NA) &= MAN \text{ car } N \in C_A \\ &= (MA)N = AMN \text{ car } M \in C_A\end{aligned}$$

En conclusion, C_A est stable par produit matriciel.

Q 3. Pour $M \in C_A$ fixé, prouvons cette affirmation par récurrence sur l'entier $k \geqslant 0$.
• **Initialisation :** pour $k = 0$, on a $M^k = M^0 = I$ et donc $M^0 \in C_A$.
• **Hérédité :** soit $k \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On suppose que $M^k \in C_A$. Alors, d'après la question précédente, en posant $N = M^k$, on a $(M \times N) \in C_A$, soit $M \times N = M \times M^k = M^{k+1} \in C_A$.
• **Conclusion :** la propriété considérée étant vraie au rang 0 et héréditaire, on peut affirmer que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in C_A}$.

Q 4. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$.
Tout d'abord, si Π est le polynôme nul, il est tout à fait évident que $\Pi(A)$ commute avec A puisque $\Pi(A)$ est, dans ce cas très particulier, la matrice nulle de même format que A.
Supposons dorénavant que Π n'est pas le polynôme nul ; soit alors $d = d^o(\Pi)$ le degré du polynôme Π puis $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ses coefficients, en sorte que : $\Pi(X) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$.
On a : $\Pi(A) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k$, la matrice $\Pi(A)$ est combinaison linéaire de puissances de A, d'après la question précédente $\Pi(A)$ est donc combinaison linéaire de matrices qui commutent avec A. Puisque C_A constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\boxed{\Pi(A) \in C_A}$.

Q 5. Puisque la matrice carrée P est inversible, on a pour tout couple $(X, Y) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$Y = X \iff YP = XP \iff P^{-1}YP = P^{-1}XP$$

Mais alors, pour une matrice quelconque $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff AMP = MAP \\ &\iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \\ &\iff P^{-1}A(PP^{-1})MP = P^{-1}M(PP^{-1})AP \\ &\iff (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) \\ &\iff M' \in C_{A'}\end{aligned}$$

Q 6. Tout d'abord, d'après la question précédente : Φ est bien à valeurs dans $C_{A'}$ et Ψ à valeurs dans C_A.
Ensuite, pour $(M_1, M_2) \in C_A^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés, on obtient en appliquant les règles usuelles du calcul matriciel :

$$\Phi(\alpha M_1 + \beta M_2) = P^{-1}(\alpha M_1 + \beta M_2)P = (\alpha P^{-1} M_1 + \beta P^{-1} M_2)P = \alpha P^{-1} M_1 P + \beta P^{-1} M_2 P = \alpha\Phi(M_1) + \beta\Phi(M_2),$$

ce qui prouve que Φ est linéaire.
On montre de la même façon que Ψ est elle aussi linéaire.

Q 7. L'associativité du produit matriciel permet d'affirmer que

$$\forall M \in C_{A'},\ \Phi\circ\Psi(M) = \Phi(PMP^{-1}) = P^{-1}(PMP^{-1})P = (P^{-1}P)M(P^{-1}P) = M,$$

en sorte que : $\boxed{\Phi\circ\Psi = \mathrm{id}_{C_{A'}}}$.
On prouve de même que : $\boxed{\Psi\circ\Phi = \mathrm{id}_{C_A}}$.

Q 8. D'après les deux questions précédentes, les applications $\Phi : C_A \longrightarrow C_{A'}$ et $\Psi : C_{A'} \longrightarrow C_A$ sont toutes deux linéaires et bijectives, telles que : $\Phi^{-1} = \Psi$, $\Psi^{-1} = \Phi$.
On peut donc affirmer que Φ et Ψ constituent des isomorphismes d'espaces vectoriels.

I.B Quelques exemples en dimension 3

I.B.1 Premier exemple

Q 9. • Recherche des valeurs propres de A :
Observons que le polynôme caractéristique χ_A est tel que

$$\begin{array}{rcl} \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) & = & \begin{vmatrix} (\lambda+1) & 0 & -2 \\ 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 1 & -1 & (\lambda-2) \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda+1)\left[(\lambda+1)(\lambda-2)+2\right] \\ & = & (\lambda+1)\left[\lambda^2-\lambda\right] \\ & = & \boxed{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)} \end{array}$$

Le spectre de A est donc constitué des trois valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.
Puisque la matrice A est carrée de format (3×3) et possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
• Détermination des sous-espaces propres associés à chaque valeur propre de A :
◇ Recherche de $E_{\lambda_1}(A)$:
Pour $\lambda_1 = -1$, on obtient en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de $(A - \lambda_1 I) = (A + I)$:

$$(A-\lambda_1 I) = (A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en sorte que :

$$(A+I)\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{E_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[C^{(1)}\right]}$.
◇ Recherche de $E_{\lambda_2}(A)$:
Pour $\lambda_2 = 0$, des calculs similaires montrent que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que $\boxed{E_{\lambda_2}(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \text{Vect}\left[C^{(2)}\right]}$.

⋄ Recherche de $E_{\lambda_3}(A)$:
Enfin dans le cas de la valeur propre $\lambda_3 = 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases},$$

en sorte que $\boxed{E_{\lambda_3}(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \text{Vect}\left[C^{(3)}\right]}$.

• Conclusion (diagonalisation explicite de A) :
en conclusion, on peut donc affirmer que $A = P_1 D P_1^{-1}$ pour une matrice inversible P_1 et une matrice diagonale D données par

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q 10. Soit $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque multiplier M' *à gauche* par $D = \text{diag}(-1;0;1)$ revient à multiplier la 1ère *ligne* de M' par -1 et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, tandis que multiplier M' *à droite* par D revient à multiplier la 1ère *colonne* de M' par -1 et la 2ème par 0 en laissant la 3ème inchangée, on aura

$$DM' = M'D \Longleftrightarrow \begin{cases} -m_{1,2} = 0, -m_{1,3} = m_{1,3} \\ 0 = -m_{2,1}, 0 = m_{2,3} \\ m_{3,1} = -m_{3,1}, m_{3,2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_{1,2} = m_{1,3} = 0 \\ m_{2,1} = m_{2,3} = 0 \\ m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M' = \text{diag}(a,b,c)}$$

Q 11. D'après la question précédente, C_D est de dimension 3 et la famille

$$\boxed{\mathscr{E}_D = \left(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)}\right)}$$

forme une base de C_D.

Q 12. D'après la **Q.5**, l'application $\Psi : C_D \longrightarrow C_A$ définie par $\Psi(M') = P_1 M' P_1^{-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans ces conditions, on doit avoir $\dim(C_A) = \dim(C_D) = 3$, et en appliquant Ψ aux trois vecteurs de base de C_D on obtient une base de C_A.
Or, comme $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$P_1 E_{1,1}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1}$$

et de même :

$$P_1 E_{2,2}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Q_2}, \quad P_1 E_{3,3}^{(3)} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P_1^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = Q_3}$$

En conclusion, C_A est de dimension 3 et la famille $\boxed{\mathscr{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)}$ forme une base de C_A.

I.B.2 Deuxième exemple

Q 13. Puisqu'elle est symétrique, la matrice carrée réelle B est diagonalisable (et même *orthogonalement* diagonalisable) dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Observons que le polynôme caractéristique χ_B est tel que

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda-7) & -2 & 2 \\ -2 & (\lambda-4) & 1 \\ 2 & 1 & (\lambda-4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\lambda-7) & -2 & 2 \\ -2 & (\lambda-4) & 1 \\ 0 & (\lambda-3) & (\lambda-3) \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\left[(\lambda-7)(\lambda-4)-4-(\lambda-7)-4\right] \\
&= (\lambda-3)\left[\lambda^2-12\lambda+27\right] \\
&= \boxed{(\lambda-3)^2(\lambda-9)}
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc $\lambda_1=\lambda_2=3$ (double) ainsi que $\lambda_3=9$.
Identifions précisément le sous-espace propre associé à $\lambda_1=\lambda_2=3$; en appliquant des opérations élémentaires aux lignes de $(B-3I)$, on obtient :

$$(B-3I)=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi : $\boxed{E_3(B)=\text{Vect}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]=\text{Vect}\left[C^{(1)},C^{(2)}\right]}$.

Enfin, comme B est symétrique, $C^{(3)}=C^{(1)}\wedge C^{(2)}=\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ fournit assurément un vecteur propre de B associé à son autre valeur propre $\lambda_3=9$.
En conclusion, la matrice B se diagonalise explicitement sous la forme $B=P_2\Delta P_2^{(-1)}$, où

$$\boxed{P_2=\begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

Q 14. Observons que pour $M'\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque, le produit $\Delta M'$ change la matrice M' en multipliant ses deux 1ères *lignes* par $\lambda_1=3$ et sa 3ème *ligne* par $\lambda_3=9$, tandis que le produit $M'\Delta$ change la matrice M' en multipliant ses deux 1ères *colonnes* par $\lambda_1=3$ et sa 3ème *colonne* par $\lambda_3=9$. Ainsi :

$$M'\in C_\Delta \iff \Delta M'=M'\Delta \iff \begin{cases} 3m_{1,3}=9m_{1,3} \\ 3m_{2,3}=9m_{2,3} \\ 9m_{3,1}=3m_{3,1} \\ 9m_{3,2}=3m_{3,2} \end{cases} \iff m_{1,3}=m_{2,3}=m_{3,1}=m_{3,2}=0$$

En conclusion, on a bien

$$\boxed{M'\in C_\Delta \iff \exists (a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5,\ M'=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}}$$

Q 15. D'après la question précédente, la famille

$$\mathscr{E}_\Delta=\left(E_{1,1}^{(3)},E_{1,2}^{(3)},E_{2,1}^{(3)},E_{2,2}^{(3)},E_{3,3}^{(3)}\right)$$

constitue une base de C_Δ, qui est donc de dimension 5.
D'après la question **Q8**, il en résulte que C_B est lui aussi de dimension 5 et que

$$\boxed{\tilde{\mathscr{E}}_B = \left(\Psi(E_{1,1}^{(3)}), \Psi(E_{1,2}^{(3)}), \Psi(E_{2,1}^{(3)}), \Psi(E_{2,2}^{(3)}), \Psi(E_{3,3}^{(3)})\right) = \left((P_2E_{1,1}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{1,2}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{2,1}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{2,2}^{(3)}P_2^{-1}), (P_2E_{3,3}^{(3)}P_2^{-1})\right)}$$

forme une base de C_B.

I.B.3 Troisième exemple

Q 16. On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}\chi_G(\lambda) = \det(\lambda I_3 - G) &= \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 2 & -3 & \lambda\end{vmatrix}\\ &= \lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -3 & \lambda\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}\\ &= \lambda(\lambda^2-3)+2\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\chi_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2}$.
Ce polynôme a une racine évidente : $\chi_G(1) = 0$. Elle est double car $\chi_G'(\lambda) = 3\lambda^2 - 3$ s'annule en 1.
On factorise donc par $(\lambda-1)^2$: $\chi_G(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. $\boxed{\text{Les valeurs propres de } G \text{ sont donc 1 et } -2}$.
Cherchons les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases}-x+y=0\\-y+z=0\\-2x+3y-z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=z\\y=z\end{cases}$$

Donc $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$.

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{cases}2x+y=0\\2y+z=0\\-2x+3y+2z=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=-2x\\z=4x\end{cases}$$

Donc $\boxed{E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)}$.

Q 17. Le polynôme caractéristique de G est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{G \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R}}$.
La multiplicité de 1 vaut 2, mais son sous-espace propre est de dimension 1, donc $\boxed{G \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Q 18. Les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ trouvés dans la question 16 conviennent.

Q 19. On pose $w = \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$ et on résout le système :

$$(g - Id_{\mathbb{R}^3})(w) = v \iff \begin{cases}y=1\\-y+z=1\\3y-z=1\end{cases} \iff \begin{cases}y=1\\z=2\end{cases}$$

Donc $\boxed{w = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}$.

Q 20. Posons $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont u, v et w. Vérifions que P_3 est inversible avec le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le matrice P_3 est de rang 3, donc elle est inversible. En particulier, $\boxed{\mathscr{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
De plus, P_3 est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$. D'après la formule de changement de bases,

$$P_3^{-1}\text{Mat}_{\text{can}}(g)P_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = T$$

Or, d'après les questions 18 et 19, la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$ est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On a bien alors : $G = P_3 T P_3^{-1}$.

Q 21. Attention : Il y a une erreur d'énoncé ! En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec T.

Soit $M' = \begin{pmatrix} a & f & g \\ h & b & c \\ i & d & e \end{pmatrix}$. Calculons :

$$TM' - M'T = \begin{pmatrix} -2a & -2f & -2g \\ h+i & b+d & c+e \\ i & d & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2a & f & f+g \\ -2h & b & b+c \\ -2i & d & d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3f & -3g \\ 3h+i & d & e-b \\ 3i & 0 & -d \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M' \in C_T \iff \begin{cases} -3f = 0 \\ -3g = 0 \\ 3h + i = 0 \\ d = 0 \\ e - b = 0 \\ 3i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = f = g = h = i = 0 \\ e = b \end{cases} \iff M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{M' \text{ est dans } C_T \text{ si et seulement s'il existe trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}}$.

Q 22. Une base de C_T est donc $\boxed{\mathscr{F}' = (E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)})}$.

D'après la question 8, la famille $\mathscr{F} = (P_3 E_{1,1}^{(3)} P_3^{-1}, P_3(E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)})P_3^{-1}, P_3 E_{2,3}^{(3)} P_3^{-1})$ est une base de C_G. En utilisant le pivot de Gauss, on trouve

$$P_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la base cherchée est (en utilisant la calculatrice !) :

$$\boxed{\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)}$$

I.C Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

Q 23. Comme A a n valeurs propres distinctes, son polynôme caractéristique admet n racines simples. Comme il est de degré n, il est scindé et toutes ses racines sont simples. Ainsi, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. Il existe donc $P_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P_4 D P_4^{-1}$, où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Q 24. Prenons $\Pi = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
\Pi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \sum_{k=0}^{m} a_k \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} a_k \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \text{diag}(a_k\lambda_1^k, \dots, a_k\lambda_n^k) \\
&= \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_n^k\right) \\
&= \text{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n))
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout polynôme $\Pi \in \mathbb{R}[X]$,

$$\boxed{\Pi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n))}$$

Q 25. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Theta(\mu P + Q) &= ((\mu P + Q)(\lambda_1), \dots, (\mu P + Q)(\lambda_n)) \\
&= (\mu P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \dots, \mu P(\lambda_n) + Q(\lambda_n)) \\
&= \mu(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \\
&= \mu\Theta(P) + \Theta(Q)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Theta \text{ est linéaire}}$.
Soit $\Pi \in \ker(\Theta)$. Alors $\Pi(\lambda_1) = \dots = \Pi(\lambda_n)$, donc Π a au moins n racines distinctes. Comme le degré de Π est inférieur ou égal à $n-1$, Π est le polynôme nul.
Donc $\boxed{\ker(\Theta) = \{0\} : \text{l'application } \Theta \text{ est injective}}$.

Q 26. Comme $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$, l'application Θ est un isomorphisme : pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\Theta(Q) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

Q 27. Prenons $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$[M'D]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M']_{i,k}[D]_{k,j} = [M']_{i,j}[D]_{j,j} = \lambda_j [M']_{i,j}$$

car les seuls coefficients de D qui sont non nuls sont sur la diagonale. De même,

$$[DM']_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}[M']_{k,j} = [D]_{i,i}[M']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}$$

Donc

$$\boxed{[M'D]_{i,j} = \lambda_j [M']_{i,j} \quad \text{et} \quad [DM']_{i,j} = \lambda_i [M']_{i,j}}$$

Q 28. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
M' \in C_D &\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [M'D]_{i,j} = [DM']_{i,j} \\
&\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [M]_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\
&\iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

car tous les λ_i sont distincts. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{M' \in C_D \iff M \text{ est diagonale}}$$

Q 29. Une base de l'espace des matrices diagonales, donc de C_D est

$$\boxed{\mathscr{B}' = (E_{1,1}^{(n)}, E_{2,2}^{(n)}, \dots, E_{n,n}^{(n)})}$$

En effet, cette famille est libre car c'est une sous-famille d'une base, et elle est génératrice car pour tout $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, $\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu_1 E_{1,1}^{(n)} + \cdots + \mu_n E_{n,n}^{(n)}$.
En utilisant la question 8, une base de C_A est donc

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(P_4 E_{1,1}^{(n)} P_4^{-1}, P_4 E_{2,2}^{(n)} P_4^{-1}, \dots, P_4 E_{n,n}^{(n)} P_4^{-1}\right)}$$

Q 30. D'après la question précédente, $\dim C_A = n$. Ceci correspond au résultat trouvé question 12 car dans cette question, on a $n = 3$ et la matrice A a 3 valeurs propres distinctes.

Q 31. D'après la question 8, la matrice M' est dans C_D. D'après la question 28, il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $M' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
D'après la question 26, il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$.
D'après la question 24,

$$\boxed{M = \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) = Q(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = Q(D)}$$

Q 32. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$.
— Initialisation : pour $n = 0$, on a $(P_4 D P_4^{-1})^0 = I_n$ et $P_4 D^0 P_4^{-1} = P_4 P_4^{-1} = I_n$, donc la formule est vraie au rang 0.
— Hérédité : prenons $n \geqslant 0$ et supposons que $(P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}$.
Alors

$$\begin{aligned}(P_4 D P_4^{-1})^{n+1} &= P_4 D P_4^{-1} (P_4 D P_4^{-1})^n \\ &= P_4 D P_4^{-1} P_4 D^n P_4^{-1} \quad \text{d'après l'HR} \\ &= P_4 D D^n P_4 - 1 \\ &= P_4 D^{n+1} P_4^{-1}\end{aligned}$$

La formule est vérifiée au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (P_4 D P_4^{-1})^n = P_4 D^n P_4^{-1}}$.
Prenons maintenant $\Pi = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Pi(P_4 D P_4^{-1}) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (P_4 D P_4^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k P_4 D^k P_4^{-1} \quad \text{d'après la récurrence} \\ &= P_4 \left(\sum_{k=0}^{m} a_k D^k \right) P_4^{-1}\end{aligned}$$

en factorisant à gauche par P_4 et à droite par P_4^{-1}. Donc $\boxed{Pi(P_4 D P_4^{-1}) = P_4 \Pi(D) P_4^{-1}}$.

Q 33. Comme $M' = P_4^{-1} M P_4$, on a $M = P_4 M' P_4^{-1}$.
En utilisant les deux questions précédentes, on a :

$$M = P_4 M' P_4^{-1} = P_4 Q(D) P_4^{-1} = Q(P_4 D P_4^{-1})$$

Donc $\boxed{M = Q(A)}$.

I.D Commutant d'une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres

Q 34. Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit les matrices $M'_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$, $M'_{12} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$, $M_{21} \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{R})$ et $M'_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ telles que : $M' = \left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned} DM' = M'D &\iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n2} \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M'_{21} & M'_{22} \end{array}\right).\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n2} \end{array}\right) \\ &\iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 M'11 & \lambda_2 M'_{12} \\ \hline \lambda_1 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 M'11 & \lambda_1 M'_{12} \\ \hline \lambda_2 M'_{21} & \lambda_2 M'_{22} \end{array}\right) \\ &\iff \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\lambda_2-\lambda_1)M'_{12} \\ \hline (\lambda_1-\lambda_2)M'_{21} & 0 \end{array}\right) = 0 \\ &\iff M'_{12} = M'_{21} = 0 \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a donc bien :

$$\boxed{M' \in C_D \iff \exists M'_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \text{ et } M'_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \text{ telles que } M' = \left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2 \end{array}\right)}$$

Q 35.

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{C}_A &\iff AM = MA \\ &\iff (P_5 D P_5^{-1})M = M(P_5 D P_5^{-1}) \\ &\iff (P_5 D P_5^{-1})(P_5 M' P_5^{-1}) = (P_5 M' P_5^{-1})(P_5 D P_5^{-1}) \\ &\iff P_5 D M' P_5^{-1} = P_5 M' D P_5^{-1} \\ &\iff DM' = M'D \text{(en multipliant à droite par } P_5 \text{ et à gauche par } P_5^{-1}) \\ &\iff M' \in C_D \end{aligned}$$

Montrons que C_D est isomorphe à $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}) \to C_D$ telle que $\varphi\left(M'_1, M'_2\right) = \left(\begin{array}{c|c} M'_1 & 0 \\ \hline 0 & M'_2 \end{array}\right)$.

φ est linéaire et d'après ce qui précède, φ est surjective. On montre facilement que $\varphi\left(M'_1, M'_2\right) = 0 \Longrightarrow M'_1 = 0$ et $M'_2 = 0$ donc φ est injective. Ainsi, Dim C_D=Dim$\left(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})\right)$=Dim $\left(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})\right)$+Dim$\left(\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})\right) = n_1^2 + n_2^2$.
L'application linéaire de C_A dans C_D qui à M associe $M' = P_5^{-1} M P_5$ est également un isomorphisme d'espace vectoriel (démonstration laissée au lecteur) donc finalement on a $\boxed{\text{Dim } C_A\text{=Dim } C_B = n_1^2 + n_2^2}$.
A la question **Q15.**, on a montré que Dim $C_B = 5$ et on avait $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$ et donc $n_1^2 + n_2^2 = 5$.
Le résultat de cette question est cohérent avec celui de la question **Q15.**

II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3

II.A Étude du cas particulier $a = 0$

Q 36. On a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
On a donc $\boxed{U_{n+1} = G.U_n}$ et par récurrence immédiate, $\boxed{U_n = G^n U_0}$

Q 37. On a $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N$ en posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour $n = 0$, on a $T^0 = I_3$ et pour $n = 1$, on a $T^1 = T$.
Soit $n \geqslant 2$: on montre facilement que N et D commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :
$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$
On montre facilement que $N^2 = 0$ donc pour tout entier $k \geqslant 2, N^k = 0$:

$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}$

$T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On constate que cette formule est également valable pour $n = 0$ et $n = 1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q 38. On pose $T = T_1 + T_2 + T_3$ avec $T_1 = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'après la question **Q 36.**, on a, pour tout entier n, $U_n = T^n U_0$

Donc $U_n = P_3 (T_1 + T_2 + T_3) P_3^{-1} U_0 = P_3 T_1 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_2 P_3^{-1} U_0 + P_3 T_3 P_3^{-1} U_0$

Le premier terme de cette somme est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans lequel on peut factoriser par 2^n,
le deuxième un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans lequel on peut factoriser par n.

On a donc $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Pour tout entier n, u_n est donc une combinaison linéaire de $(-2)^n$, n et 1

Q 39. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout entier n, on a $u_n = \alpha(-2)^n + \beta n + \gamma$.

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} + 2u_n &= 3\alpha(-2)^{n+1} + 3\beta(n+1) + 3\gamma - 2\alpha(-2)^n - 2\beta n - 2\gamma \\ &= \alpha(-2)^n(3 \times (-2) + 2) + \beta(3n + 3 - 2n) + \gamma \\ &= 3\alpha(-2)^{n+3} + \beta(n+3) + \gamma \\ &= u_{n+3} \end{aligned}$$

Toute combinaison linéaire des trois suites précédentes vérifie donc la relation de récurrence II.1.

II.B Étude du cas général

Q 40. φ est clairement linéaire.

Montrons que φ est surjective : soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors la suite défnie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $u_2 = \gamma$ et pour tout entier n,

$u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n$ appartient à F et a pour image $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ par φ : donc φ est surjecive.

Montrons que φ est injective : Soit u une suite de F telle que $\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence forte sur $\mathbb{N}$ que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$.

— Initialisation : pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ on a $u_n = 0$ puisque $\varphi(u) = 0$

— Hérédité : prenons $n \geqslant 0$ et supposons que $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$
On a alors $u_{n+3} = au_{n+2} + (a+3)u_{n+1} - 2(a+1)u_n = 0$
La propriété est vérifiée au rang $n+3$.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$ donc $u = 0$ et φ est injective.

φ est un isomorphisme et Dim F=Dim $\mathbb{R}^3 = 3$

Q 41. φ étant un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{u, v, w\}$ est une base de F si et seulement si la famille $\{\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cette famille est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base si et seulement si elle est libre si et seulement

si son déterminant est non nul.

On a donc : $\boxed{\{u,v,w\} \text{ est une base de } F \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0}$

Q 42. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout entier n, on pose $u_n = x^n$.

$$\begin{aligned} u \in F &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+3} = ax^{n+2} + (a+3)x^{n+1} + 2(a+1)x^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x^n\left(x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)\right) = 0 \\ &\iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0 \text{ puisque } x \neq 0 \end{aligned}$$

On a bien $\boxed{u \in F \iff x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = 0}$

Q 43. On a $1^3 - a \times 1^2 - (a+3) \times 1 + 2(a+1) = 1 - a - a - 3 + 2a + 2 = 0$ donc $\boxed{1 \text{ est racine de } C}$

On en déduit que C est factorisable par $x-1$.

On cherche donc trois réels α, β et γ tels que $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

$(x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$.

On a donc le système suivant : $\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta - \alpha & = & -a \\ \gamma - \beta & = & -(a+3) \\ -\gamma & = & 2(a+1) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1-a \\ \gamma & = & -2(a+1) \end{array} \right.$

On a donc $x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1) = (x-1)(x^2 + (1-a)x - 2(a+1))$. On cherche les racines du polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$: on a $\Delta = (1-a)^2 + 8(a+1) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geqslant 0$ donc ces racines sont réelles.

Donc $\boxed{\text{les racines de } C \text{ sont réelles}}$

Q 44. D'après la question précédente, si $a \neq -3$ alors le discriminant du polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$ est strictement positif et donc ce polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

Le produit de ces deux racines est égal à $-2(a+1)$ et leur somme est égale à $(1-a)$.

Supposons que l'une de ces racines soit égale à 1 : leur produit étant égal à $-2(a+1)$ alors la seconde est égale à $-2(a+1)$, et dans ce cas la somme de ces deux racines est égale à $-2a+1$. On doit donc avoir $-2a+1 = 1-a$ soit $a = 0$, ce qui est exclus.

Donc $\boxed{C \text{ admet deux racines distinctes autres que 1}}$

D'après la question **Q41.**, les trois suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(r_1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$. On reconnait un déterminant de Vandermonde égal à $(r_1-1)(r_2-1)(r_2-r_1)$ qui est bien non nul puisque r_1 et r_2 sont des réels distincts et tous deux différents de 1.

Donc $\boxed{\text{les trois suites } (1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_1)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (r_2)_{n\in\mathbb{N}} \text{ forment une base de } F}$

Q 45. Si $a = -3$ alors le polynôme $x^2 + (1-a)x - 2(a+1)$ s'écrit $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ qui admet une racine double égale à -2..

Donc $\boxed{\text{Si } a = -3, \text{ l'équation (II.2) admet une racine simple égale à 1 et une racine double égale à -2}}$

Q 46. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose, pour tout entier n, $v_n = nx^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$: d'une part, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (n+3)x^{n+3} - a(n+2)x^{n+2} - (a+3)(n+1)x^{n+1} + 2n(a+1)x^n \\ &= x^n\left((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)\right) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} x^n\left(nC(x) + xC'(x)\right) &= x^n\left[n\left(x^3 - ax^2 - (a+3)x + 2(a+1)\right) + x\left(3x^2 - 2ax - (a+3)\right)\right] \\ &= x^n\left(nx^3 - nax^2 - n(a+3)x + 2n(a+1) + 3x^3 - 2ax^2 - (a+3)x\right) \\ &= x^n\left((n+3)x^3 - a(n+2)x^2 - (a+3)(n+1)x + 2n(a+1)\right) \end{aligned}$$

Donc on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n = x^n\left(nC(x) + xC'(x)\right)}$

Q 47. Si $a = -3$ et en utilisant la notation précédente, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+3} - av_{n+2} - (a+3)v_{n+1} + 2(a+1)v_n &= (-2)^n\left(nC(-2) - 2C'(-2)\right) \\ &= 0 \text{ puisque -2 est racine double de } C \text{ donc } C(-2) = C'(-2) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{si } a=-3\text{, la suite } \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un élément de } F}$

Montrons que la famille $\left\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ est une base de F :

On utilise la question **Q41.** : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$

Donc $\boxed{\text{la famille } \left\{(1)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n(-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\} \text{ est une base de } F}$

Q 48. On reconnait l'équation qui définit F avec $a=-3$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe trois réels α, β et γ tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \alpha+\beta(-2)^n+\gamma n(-2)^n$

Or, on a $u_0=1$, $u_1=0$ et $u_2=1$ donc on a le système :

$$\begin{cases} \alpha+\beta & = & 1 \\ \alpha-2\beta-2\gamma & = & 0 \\ \alpha+4\beta+8\gamma & = & 1 \end{cases}$$ On résout le système et on trouve : $$\begin{cases} \alpha & = & \dfrac{5}{9} \\ \beta & = & \dfrac{4}{9} \\ \gamma & = & -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

On a donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \frac{5}{9}+\frac{4}{9}(-2)n-\frac{1}{6}n(-2)^n)}$

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Les thèmes d'étude proposés dans cette épreuve permettent de balayer l'ensemble du programme d'algèbre linéaire et de calcul matriciel des deux années. Le sujet comprend deux parties indépendantes dans une large mesure. La première partie permet d'étudier le commutant d'une matrice dans des cas particuliers et dans le cas général de matrices diagonalisables. La deuxième partie propose l'étude d'un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 3 à l'aide des outils algébriques du programme.

Analyse globale des résultats

Le sujet est de longueur raisonnable. Les candidats ayant une bonne connaissance du cours et utilisant correctement les définitions rappelées dans l'énoncé pouvaient obtenir un résultat honorable.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Commentaires généraux

Compréhension du sujet

Le sujet comprend plusieurs exemples de matrices de taille 3, ce qui a aidé de nombreux candidats à l'appréhender. Il est néanmoins regrettable que de nombreux candidats se limitent aux questions calculatoires au détriment des questions plus théoriques alors même que beaucoup étaient abordables par des étudiants ayant une bonne connaissance du cours d'algèbre linéaire.

Cours

Les notions de sous-espace vectoriel, base, famille libre, famille génératrice, dimension, isomorphisme, bijectivité devraient être mieux maitrisées par les candidats.

- La donnée d'une base était demandée à de nombreuses reprises dans le sujet. Rappelons que lorsque la dimension de l'espace vectoriel est inconnue il faut *démontrer* que la famille est libre *et* génératrice. Un autre résultat utile et que l'énoncé suggérait d'utiliser à plusieurs reprises est le fait que l'image d'une base par un isomorphisme est une base.
- Dans le même ordre d'idées, pour démontrer qu'une application est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels dont on ne connait pas les dimensions il faut démontrer sa bijectivité. On ne peut se contenter de l'injectivité lorsqu'on n'a pas encore démontré l'égalité des dimensions, ce qui était justement l'objectif de la question.
- La notion de matrice de passage est mal assimilée. La formule de changement de bases n'est pas souvent citée et ne semble pas bien connue.
- Certains candidats trouvent des espaces propres réduits au vecteur nul, ou des matrices de passage avec une colonne nulle.

Calculs

- Le calcul des déterminants et des polynômes caractéristiques est dans la plupart des cas bien réalisé. Les candidats pouvaient utiliser leur calculatrice, mais dans ce cas il faut le préciser dans sa copie et bien montrer que les définitions et formules sont connues.
- Il est indispensable de savoir mener un calcul faisant intervenir des paramètres comme coefficients d'une matrice.
- Il est inutile lorsque cela n'est pas demandé de calculer l'inverse des matrices de passage.

Raisonnement, rédaction, présentation

Beaucoup de copies ne sont qu'une succession de calculs sans aucune explication. La communication est une compétence importante pour un futur ingénieur. Un effort d'explication et de clarté est attendu par le jury. En ce qui concerne la logique, il faut clairement préciser si le raisonnement se fait par équivalence, par double ou par simple implication. Un raisonnement par équivalence ne doit pas être confondu avec une simple implication. Dans le même registre, des difficultés d'expression dans la langue française et un manque de soin ont été remarqués (et pénalisés) dans plusieurs copies.

Détails sur certaines questions

I.A - Propriétés générales

Q3. Le jury attendait une récurrence.

Q5. Il fallait prendre garde à raisonner par équivalence (ou double implication) et non par simple implication.

Q6 et **Q7**. Les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

Q8. Le jury attendait le rappel de la définition d'un isomorphisme. Ici les questions précédentes permettaient d'affirmer que les applications étaient des bijections réciproques.

I.B - Quelques exemples en dimension 3

Cette partie a été abordée par quasiment tous les candidats. Les calculs d'éléments propres ont permis à la plupart de gagner des points.

Q11, **Q15**, **Q22**. Les candidats ont souvent donné une réponse sans justification. La démonstration du caractère libre et générateur de la famille était attendu ou l'emploi de l'image d'une base par isomorphisme.

Q21. Il y avait une erreur dans l'énoncé où le coefficient d devait être pris égal à 0. Seule la question **Q22** utilisait le résultat de cette question dans la suite du problème.

Q22. L'erreur de la question **Q21** n'a pas pénalisé les candidats dans cette question, le jury ayant uniquement tenu compte de la démarche logique mise en œuvre.

I.C - Commutant d'une matrice d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes

Q24. On attendait un calcul détaillé en mettant en évidence le calcul des puissances d'une matrice diagonale.

Q25. Il était utile d'utiliser le noyau pour montrer l'injectivité. Le lien entre le nombre de racines d'un polynôme et son degré permettait de conclure.

Q26. Peu de candidats ont fait le lien avec la question précédente qui permettait de prouver la bijectivité et de conclure.

La fin de la partie permettait au candidat ayant suffisamment de recul de faire la synthèse des résultats précédents.

À noter que d'assez nombreux candidats ont bien traité **Q33** mais n'ont malheureusement pas conclu à l'égalité des ensembles par double inclusion.

II Suites récurrentes linéaires d'ordre 3

Q36. Une démonstration par récurrence était attendue pour la relation $U_n = G^n U_0$.

Q40. C'est en démontrant que φ est un isomorphisme qu'on pouvait conclure que la dimension de F vaut 3.

Q41. Il fallait encore utiliser l'image d'une base par isomorphisme.

Q44. Il ne fallait pas oublier de prouver que les suites étaient éléments de l'espace vectoriel et d'utiliser le calcul du déterminant défini en **Q41**.

Conclusion

Ce sujet a permis d'évaluer la maitrise de la plupart des notions d'algèbre linéaire au programme. De nombreuses questions faisant appel aux définitions et aux méthodes du cours ont permis à ceux des candidats ayant des connaissances solides du cours de se distinguer.