Intégration

1. Définitions :
   — Fonctions en escalier ; continues par morceaux (pffff....).
   — Intégrale convergente vs fonction intégrable.
2. Théorèmes :
   — Convergence des sommes de Riemann.
   — Théorème fondamental de l'analyse.
   — Conséquences : IPP, changement de variable.
   — Inégalités : fonctions positives (dont le cas des fonctions continues non nulles), valeur absolue d'une intégrale, Cauchy-Schwarz (cas d'égalité) : le produit de deux fonctions de carré intégrable est lui-même intégrable.
   — Convergence/divergence de $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ainsi que de $\int_0^1 \ln t dt$.
   — (bof) lien série/intégrales pour une fonction décroissante positive.
   — (bof bof bof) IPP pour les intégrales impropres. Moins inutile : changement de variable pour de telles intégrales (parler de bijection $\mathcal{C}^1$ pour le changement de variable ; préciser les intervalles ; l'existence d'une intégrale est équivalente à celle de l'autre).
   — Théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité (plutôt que pour les intégrales convergentes...).
   — Théorème de convergence dominée.
   — Intégration terme à terme, avec condition sur $\sum \int_I |f_n|$.
   — « Continuité d'une intégrale à paramètre ». Caractère $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^k$.
3. Connaître/savoir faire aussi :
   — Pour justifier l'existence d'une intégrale, toujours COMMENCER par dire que telle fonction est continue (par morceaux) sur tel intervalle (et seulement après regarder les éventuels bords, où on parlera d'intégrabilité locale en général.
   — Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathcal{C}^1$.
   — Contre-exemple permettant de distinguer intégrales convergentes et fonctions intégrables : $\frac{\sin x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ au hasard.
   — Intégration de fractions pas trop méchantes.
   — Changements de variables affine/exponentiel/trigonométrique (dont $\tan \frac{x}{2}$).
   — Comparer des sommes et des intégrales, pour des fonctions monotones.
   — IPP et changement de variable dans des intégrales impropres, en passant éventuellement par un segment.
   — Contre-exemples pour les théorèmes d'interversion (bosses glissantes, chapeaux pointus...).
   — Dominer proprement ; signaler ce qu'on voudrait faire, si on n'arrive pas à le faire !
   — Bonus : avoir déjà manipulé la transformée de Laplace... en maths ! Théorème de la valeur finale, initiale...
   — Prouver des résultats de limite sur variable réelle en passant par du séquentiel via le TCD.
   — Savoir « tout montrer » sur la fonction Γ.