E3A 2019 Math 2 (PC)

Question préliminaire

Soit a un réel non nul.
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout x réel associe le nombre complexe $\frac{1}{x+ia}$ où i vérifie $i^2 = -1$.

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif

Pour tout réel α et tout réel $\lambda > 0$, on définit l'application $f_{n,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto t^\alpha e^{-\lambda t}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble A des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\lim\limits_{t \to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.

   (b) Déterminer l'ensemble B des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)dt$ converge.

2. Montrer que pour tout x réel, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.
   On définit alors les deux fonctions U et V sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}dt$ et $V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}dt$.

3. Etudier les parités des fonctions U et V.

4. A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.
   On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. Pour tout réel x, on pose $W(x) = U(x) + iV(x)$ où i vérifie $i^2 = -1$.

   (a) Montrer que la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)

   (c) En déduire que U et V sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (d) Prouver que l'on a pour tout réel x : $\begin{cases} U'(x) & = -\frac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) & = \frac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}$

6. Pour tout réel t, on note $g(t) = f_{-1/2,\lambda}(t)\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\lambda t}\sin(t)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt$.

(a) Prouver que pour tout entier naturel n, $a_n = \int_0^{\pi} \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)dt$.

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

8. (a) Justifier que la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$ converge. On note S sa somme.

   (b) Montrer que $S > 0$.

   (c) En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$, montrer que l'on a : $\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$.

9. A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

10. Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = \left[U^2(x) + V^2(x)\right]^{1/2}$ et $T(x) = \text{Arctan}\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)$.

    (a) Prouver que les fonctions R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

    (b) Montrer que les fonctions R et T sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

    (c) Démontrer que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.

    (d) Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

    (e) En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et de T à l'aide de fonctions usuelles.

11. Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

12. Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question 5b.

13. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $U_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)dt$ et $V_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)dt$.

    (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.

    (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$.