



SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

MINES MP 2011, MATHS 2



I Préliminaire

Q 1. Hum... $j^3 = 1$, donc $j^4 = j$, puis $j^4 + j^2 + 1 = 1 + j + j^2$, ce qui mène à

$$\boxed{j^4 + j^2 + 1 = 0.}$$

Q 2. On commence par calculer le polynôme caractéristique — soit par un calcul sans mystère, soit en reconnaissant (sans forcément le dire) une matrice compagnon.

$$\chi_A = X^4 + X^2 + 1.$$

On note que j est racine de ce polynôme (c'est finaud : on a *encore* en mémoire une ancienne question). Puisque χ_A est réel, $\bar{j} = j^2$ est également racine. Et puisque χ_A est pair, $-j$ et $-j^2$ sont encore racines :

$$\chi_A = (X - j)(X - \bar{j})(X + j)(X + \bar{j}).$$

La matrice A possède donc 4 valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

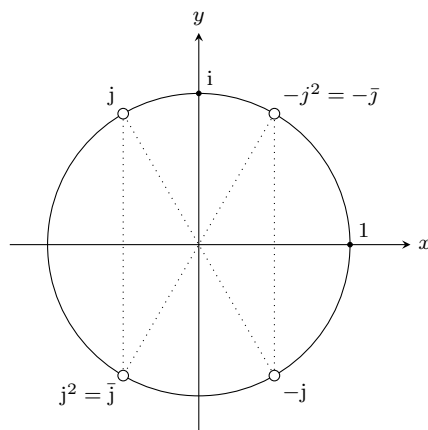


Fig. 1 — Les valeurs propres de la matrice A , et leurs symétries.

Il est ensuite aisé¹ de vérifier qu'un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ est proportionnel au vecteur ${}^t(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$. Grâce à une solide connaissance des puissances successives de j , on trouve donc une base propre puis une matrice diagonalisante :

$$\text{En posant } U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ j & j^2 & j^2 & j \\ j^2 & j & -j & -j^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } U^{-1}AU = D = \text{diag}(j, j^2, -j^2, -j)$$

¹D'autant plus aisé qu'on l'a fait en cours... mais on a fait tellement de choses !

Q 3. On peut bien évidemment utiliser la diagonalisation précédente pour calculer directement les solutions de

$$X' = AX. \quad (1)$$

à l'aide de l'exponentielle de tA ... Il est souvent plus simple de résoudre le système différentiel découplé.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$, et $Y = U^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$. On retrouve les équivalences usuelles :

$$X' = AX \iff Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = jy_1 \\ y_2' = j^2 y_2 \\ y_3' = -j^2 y_3 \\ y_4' = -jy_4 \end{cases}$$

Ce dernier système est lui-même équivalent à l'existence de quatre constantes $K_1, \dots, K_4 \in \mathbf{C}$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} y_1(t) = K_1 e^{jt} \\ y_2(t) = K_2 e^{j^2 t} \\ y_3(t) = K_3 e^{-j^2 t} \\ y_4(t) = K_4 e^{-jt} \end{cases}$$

Puisque $X = UY$, on constate, un peu surpris, qu'il n'a pas été utile² d'inverser U .

Les solutions de (1) sont les applications $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ j & j^2 & j^2 & j \\ j^2 & j & -j & -j^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{jt} \\ K_2 e^{j^2 t} \\ K_3 e^{-j^2 t} \\ K_4 e^{-jt} \end{pmatrix}$

Q 4. Une fonction y vérifie

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \quad (2)$$

si et seulement si $\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$ vérifie (1), ce qui revient à l'existence de quatre constantes $K_1, \dots, K_4$ telles que

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ j & j^2 & j^2 & j \\ j^2 & j & -j & -j^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{jt} \\ K_2 e^{j^2 t} \\ K_3 e^{-j^2 t} \\ K_4 e^{-jt} \end{pmatrix}.$$

Cette dernière relation est elle-même équivalente à :

$$y(t) = K_1 e^{jt} + K_2 e^{j^2 t} - K_3 e^{-j^2 t} - K_4 e^{-jt}.$$

Cette équivalence est cruciale, et peut-être pas si évidente que cela, vous ne pensez pas ? Il faut y réfléchir, en tout cas, en se souvenant bien de comment on a mené l'étude d'une équation différentielle scalaire d'ordre n et de sa vectorisation !.

Quitte à changer le nom des variables :

Les solutions complexes de (2) sont les $t \mapsto K_1 e^{jt} + K_2 e^{j^2 t} + K_3 e^{-j^2 t} + K_4 e^{-jt}$, avec $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbf{C}$

Pour les solutions réelles, on peut

- dire qu'elles constituent un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 (le théorème de structure étant aussi bien valable dans $\mathbf{R}$ que dans $\mathbf{C}$)
- construire (en combinant les solutions complexes) une famille de 4 fonctions réelles, et
- prouver leur liberté.

²Alors qu'on se souvenait assez précisément avoir entendu en cours qu'il était crucial de se précipiter pour inverser la matrice de passage. Étrange...

On peut aussi déterminer, parmi les solutions complexes, celles qui sont réelles. Adoptons ce point de vue, en fixant $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbf{C}$, et en déterminant à quelles conditions la fonction $f : t \mapsto K_1 e^{jt} + K_2 e^{j^2 t} + K_3 e^{-j^2 t} + K_4 e^{-jt}$ est à valeurs réelles. Elle l'est si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\overline{f(t)} = f(t)$, ou encore :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad K_1 e^{jt} + K_2 e^{j^2 t} + K_3 e^{-j^2 t} + K_4 e^{-jt} = \overline{K_2} e^{jt} + \overline{K_1} e^{j^2 t} + \overline{K_4} e^{-j^2 t} + \overline{K_3} e^{-jt}.$$

La famille des quatre applications³ auxquelles on pense étant libre (pourquoi, au fait ?), ceci est *équivalent*⁴ à : $K_2 = \overline{K_1}$ et $K_4 = \overline{K_3}$ (les deux autres équations étant équivalentes). On a alors $f(t) = 2 \operatorname{Re}(K_1 e^{jt} + K_3 e^{-j^2 t})$. Si l'on note $K_1 = a + ib$ et $K_3 = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, alors, en posant $\omega = \sqrt{3}/2$:

$$y(t) = 2 e^{-t/2} (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + 2 e^{t/2} (c \cos \omega t - d \sin \omega t).$$

Les complexes K_1 et K_3 décrivent $\mathbf{C}$, les réels a, b, c, d décrivent $\mathbf{R}$. On peut enfin choisir de reparamétriser les parties oscillantes par module/phase :

Les solutions réelles de (2) sont les $t \mapsto C_1 \cos(\omega t - \varphi_1) e^{-t/2} + C_2 \cos(\omega t - \varphi_2) e^{t/2}$, avec $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}$.

II Un lemme de du Bois-Reymond

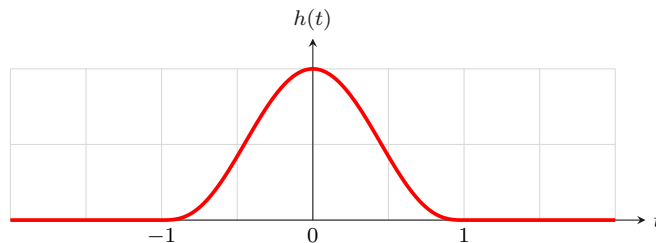
Q 5. L'application h est bien entendu de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Puisqu'elle est paire, on va se contenter de l'étude au voisinage de 1.

- Tout d'abord, $\lim_{t \rightarrow 1^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} h(t) = 0 = h(1)$, donc h est continue en 1.
- Ensuite, h est dérivable en dehors de 1, avec $h'(t) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} 0$ et $h'(t) = (-2t)(1 - t^2)^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$.
- Ceci — et la continuité⁵ de h en 1 — nous assure que h est dérivable en 1.
- On a même la continuité de h' en 1 pour le même prix.

Sur $] -1; 1[$, h coïncide avec une application polynomiale $\tilde{P}$, avec P ayant 1 comme racine triple, donc 1 reste racine de P'' . Mais alors, h' est continue en 1, dérivable en dehors de 1, avec $h''(t) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} 0$ et $h''(t) = P''(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0$. Ceci et la continuité de h' en 1 nous assurent que h' est dérivable en 1, avec même h'' continue en 1. Ainsi,

h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

Enfin, voici un graphe :



► Si h était de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$, elle admettrait un développement limité à l'ordre 3 en 1. La valeur de h à droite de 1 imposerait même : $h(1+u) = o(u^3)$. Mais, si $u < 0$, on a $h(1+u) = (2u - u^2)^3 \sim 8u^3$, donc $h(1+u)$ n'est pas négligeable devant u^3 lorsque u tend vers 0^- , ce qui est absurde. ◀

La fonction h n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$.

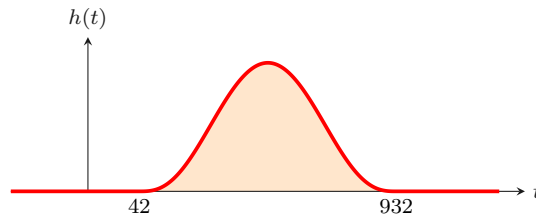
Q 6. L'application $x \mapsto \frac{x - \frac{x_0+x_1}{2}}{\frac{x_1-x_0}{2}}$ transporte $]x_0; x_1[$ sur $] -1; 1[$, ce qui devrait à peu près faire l'affaire, en composant avec h .

Il suffit de prendre $g : x \mapsto h\left(\frac{x - \frac{x_0+x_1}{2}}{\frac{x_1-x_0}{2}}\right)$.

³Et non pas de complexes...

⁴Et cette équivalence, cruciale, est à justifier autrement que par une aussi mystérieuse que risible *identification*

⁵OUI, il faut absolument rappeler la continuité de h ici, même si elle a été évoquée une ligne plus haut.

Fig. 2 — L'application $t \mapsto h\left(\frac{t-487}{445}\right)$.

Q 7. Les fonctions du type précédent vont nous servir de scalpel.

► **Supposons la fonction F non identiquement nulle sur $]0; 1[$.** Il existe alors $a \in]0; 1[$ tel que $F(a) \neq 0$. Sans perdre en généralité, on peut supposer $F(a) > 0$ (quitte à changer F en $-F$).

Par continuité de F, il existe alors un voisinage $]x_0; x_1[$ de a dans $]0; 1[$ tel que F est positive sur $[x_0; x_1]$. On considère alors la fonction g construite à la question précédente. Elle est dans $E_{0,0}^2$, donc $\int_0^1 F(u)g(u)du = 0$, c'est-à-dire (puisque g est nulle en dehors de $]x_0; x_1[$) : $\int_{x_0}^{x_1} F(u)g(u)du = 0$. On parle ici de l'intégrale d'une fonction continue positive. Pour que cette intégrale soit nulle, cela impose à la fonction d'être nulle sur $[x_0; x_1]$. En particulier, $F(a)g(a) = 0$, puis⁶ $F(a) = 0$: et voilà notre **contradiction**. ◀

La fonction F est donc nulle sur $]0; 1[$, puis $[0; 1]$ par continuité.

La fonction F est nulle sur $[0; 1]$.

Remarque 1 (Une autre jolie démonstration de ce lemme) Il existe d'autres moyens de démontrer ce lemme de du Bois-Reymond, notamment par... des formes linéaires !

- **1^{er} résultat.** Notons $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$. Soit $f \in E$ telle que

$$\forall u \in E \quad \int_0^1 u = 0 \implies \int_0^1 fu = 0.$$

Alors f est une fonction constante.

- **Démonstration.** Notons φ et ψ les formes linéaires définies par $\varphi(u) = \int_0^1 u$ et $\psi(u) = \int_0^1 fu$. Notre hypothèse se traduit par $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } \psi$. La théorie des formes linéaires montre alors qu'il existe α tel que $\psi = \alpha\varphi$, c'est-à-dire

$$\forall u \in E \quad \int_0^1 fu = \int_0^1 \alpha u,$$

ce que l'on réécrit

$$\forall u \in E \quad \int_0^1 (f - \alpha)u = 0.$$

En choisissant la fonction $u := f - \alpha$, on trouve $\int_0^1 (f - \alpha)^2 = 0$: intégrale nulle d'une fonction positive et continue. On en déduit que f est constante et égale à α .

- **2^e résultat.** Soit $f \in E$ tel que, pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbf{R})$ telle que $u(0) = u(1) = 0$, on ait $\int_0^1 fu = 0$. Alors f est nulle.
- **Démonstration.** Notons F une primitive de f, et Φ une primitive de F. Autrement dit, Φ est une primitive seconde de f, qui n'est donc pas déterminée de manière unique, mais à une fonction affine près $t \mapsto \alpha t + \beta$. Il est donc possible de choisir cette fonction affine pour que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. L'énoncé nous dit que, pour toute fonction $u \in E_{0,0}^2$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 uf = \int_0^1 u'F & u(0) &= u(1) = 0 \\ &= \int_0^1 u''\Phi & \Phi(0) &= \Phi(1) = 0. \end{aligned}$$

Renversons le point de vue. Si $v \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbf{R})$ est une fonction quelconque, notons u sa primitive seconde s'annulant en 0 et en 1, alors on

$$\int_0^1 v\Phi = \int_0^1 uf = 0$$

et le résultat précédent permet de conclure que Φ est constante. Notamment, $f = \Phi''$ est nulle.

III Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Q 8. Tout d'abord :

$$q(t) = \int_0^1 \left[P(f_0(x) + tu(x)) + Q(f'_0(x) + tu'(x)) \right] dx.$$

⁶g est à valeurs strictement positives sur $]x_0; x_1[$, donc en a.

Il s'agit donc de voir des expressions de la forme $R(y_0 + z)$ comme des polynômes en z . Le théorème de Taylor pour les polynômes (versions algébrique) nous dit cela : si R est de degré au plus n , alors

$$R(y_0 + z) = \sum_{k=0}^n \frac{R^{(k)}(y_0)}{k!} z^k.$$

Ainsi, en notant n le maximum des degrés de P et Q :

$$q(t) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \left[\frac{P^{(k)}(f_0(x))}{k!} (tu(x))^k + \frac{Q^{(k)}(f'_0(x))}{k!} (tu'(x))^k \right] dx,$$

c'est-à-dire : $q(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, avec

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad a_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 \left[P^{(k)}(f_0(x)) u(x)^k + Q^{(k)}(f'_0(x)) u'(x)^k \right] dx.$$

L'application q est polynomiale, avec en particulier $a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x))u(x) + Q'(f'_0(x))u'(x)] dx$.

Q 9. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_0 + tu \in E$ (vérification immédiate), donc $q(t) = J(f_0 + tu) \geq J(f_0) = q(0)$. Cela impose à la fonction polynomiale (et donc dérivable) q d'avoir sa dérivée nulle en 0, c'est-à-dire :

$$a_1 = 0.$$

Évaluons maintenant a_1 en intégrant par parties dans le second terme :

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 P'(f_0(x))u(x) dx + \int_0^1 Q'(f'_0(x))u'(x) dx \\ &= \int_0^1 P'(f_0(x))u(x) dx + \underbrace{\left[u(x) Q'(f'_0(x)) \right]_0^1}_{=0 \text{ car } u \in E_{0,0}^2} - \int_0^1 u(x) \frac{d}{dx} [Q'(f'_0(x))] dx. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall u \in E_{0,0}^2 \quad \int_0^1 \left(P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx} [Q'(f'_0(x))] \right) u(x) dx = 0.$$

Le lemme de du Bois-Reymond s'applique :

Pour tout $x \in [0; 1]$: $P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx} [Q'(f'_0(x))]$.

Q 10. Bon, ça ne devrait pas être trop méchant : ici, $P = 0$ et $Q = X^2$ donc $Q' = 2X$.

Dans ce cas, la condition d'Euler-Lagrange est $\frac{d}{dx}(f'_0(x)) = f''_0(x) = 0 \quad (\Delta).$

Les solutions de (Δ) sont les applications de dérivée seconde nulle : il s'agit des applications affines, qui sont bien de classe $\mathcal{C}^2$. Parmi celles-ci, il en existe évidemment exactement une qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$...

Il existe une unique solution de (Δ) appartenant à $E_{0,1}^2$: c'est $x \mapsto x$.

Q 11. La question précédente constitue l'analyse : si J_1 possède un minimum sur $E_{0,1}^2$, ce ne peut être qu'en la fonction identité. Vérifions que cet unique candidat solution va passer brillamment les oraux (enfin, la synthèse). Il s'agit de montrer que pour tout $f \in E_{0,1}^2$, $J_1(f) \geq J_1(\text{id})$, ou encore :

$$\forall f \in E_{0,1}^2 \quad \int_0^1 f'^2(x) dx \geq \int_0^1 1^2 dx = 1.$$

□ Soit donc $f \in E_{0,1}^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée au produit $1 \cdot f'$) donne justement :

$$\left| \int_0^1 1 \cdot f' \right| \leq \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt}. \quad (*)$$

Le membre de gauche vaut $|f(1) - f(0)| = 1$ (car $f \in E_{0,1}^2$) et celui de droite vaut $\sqrt{J_1(f)}$. Ainsi, pour tout $f \in E_{0,1}^2$, $J_1(f) \geq J_1(\text{id})$. $\square$

La fonction J_1 possède 1 pour minimum sur $E_{0,1}^2$, valeur prise en id .

Supposons que f réalise maintenant l'égalité $J_1(f) = J_1(\text{id}) = 1$. La condition d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*) impose alors que f' soit colinéaire à la fonction constante égale à 1 — c'est-à-dire que f' est constante — puis f affine, et les conditions aux bords imposent enfin : $f = \text{id}$.

La fonction J_1 possède 1 pour minimum sur $E_{0,1}^2$, valeur prise *uniquement* en id .

Q 12. Ici, $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$, donc $Q' = 2X + 3X^2$.

La condition d'Euler-Lagrange s'écrit ici : $\frac{d}{dx}(2f'(x) + 3f'(x)^2) = 0$ (Δ).

Soit f une solution de cette équation. La fonction $2f' + 3f'^2$ est alors constante, disons égale à K . Si on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des racines de $3X^2 + 2X - K$, le fonction f' est alors continue et à valeurs dans l'ensemble fini $\mathcal{Z}$, donc est constante. Ainsi f est affine, et les conditions aux bords imposent à f d'être nulle. Réciproquement, la fonction nulle vérifie bien (Δ), et est dans $E_{0,0}^2$.

La seule solution de Δ appartenant à $E_{0,0}^2$ est la fonction nulle.

Q 13. Le principe est le même qu'à la question 11 : si J_2 présente un minimum sur $E_{0,0}^2$, ce ne peut être qu'en 0. Or $J_2(0) = 0$, donc J_2 est à valeurs positives (et même strictement positives en dehors de 0). On va donc chercher g telle que $J_2(g) < 0$. Faisons confiance en l'énoncé...

On se concentre fort, on plisse les yeux pour prendre un air intelligent, et on calcule de tête $J_2(tf)$ (avec f la fonction fournie par l'énoncé) en espérant trouver quelque chose de strictement négatif :

$$J_2(tf) = \dots = -\frac{2}{105} t^2(3t - 7).$$

Notamment, $J_2(3f) = -\frac{4}{105} < J_2(0)$.

La fonction J_2 ne possède pas de minimum sur $E_{0,0}^2$.

Bon, ici le rapport du jury m'agace nettement. « Peu de candidats savent calculer ». Et les membres du jury ont tous fait le calcul ? Ou bien ont hoché la tête en regardant le résultat, en se disant que bien entendu ils savent faire ce calcul sans erreur ?

IV Un exemple avec dérivée seconde

Q 14. C'est (quasiment) une question de cours : si deux fonctions sont de carré intégrable, alors leur produit est intégrable.

Ici,

- f et f'' sont continues sur $\mathbf{R}^+$,
- de plus $|ff''| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |f''|^2) \in \mathcal{L}^1$.

La fonction ff'' est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Si $ff' = (f^2/2)'$ tendait vers $+\infty$ en $+\infty$, alors il en serait de même pour f^2 (par exemple parce que sa dérivée serait minorée par 1 au delà d'un certain réel; etc...), ce qui interdirait à f^2 d'être intégrable.

La fonction ff' ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

Q 15. On intègre par parties :

$$\forall T > 0 \quad \int_0^T ff'' = [ff']_0^T - \int_0^T f'^2,$$

ou encore :

$$\forall T > 0 \quad \int_0^T f'^2 = f(T)f'(T) - f(0)f'(0) - \int_0^T ff''. \quad (\mathcal{R})$$

Le membre de gauche est « une fonction » croissante de T , donc possède une limite, finie ou infinie, lorsque T tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, le membre de droite ne tend pas vers $+\infty$ (l'intégrale à droite possède une limite finie, par intégrabilité de ff''), donc $\int_0^T f'^2 \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbf{R}$.

La fonction f' est de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

Maintenant, toujours en regardant $(\mathcal{R})$, on est assuré de l'existence d'une limite finie ℓ' pour ff' en $+\infty$. Ainsi, $\left(\frac{f^2}{2}\right)'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell'$, et on raisonne comme plus haut.

► On suppose $\ell' \neq 0$, par exemple $\ell' < 0$ pour changer, alors on aurait l'existence d'un réel T_0 tel que $\left(\frac{f^2}{2}\right)'(t) \leq \frac{\ell'}{2}$ pour $t \geq T_0$, et notamment

$$\forall t \geq T_0 \quad f^2(t) \leq f^2(T_0) + (t - T_0) \ell'.$$

Or le membre de droite est strictement négatif pour t assez grand, donc on se retrouve avec $f^2(t) < 0$, ce qui n'est pas commun. ◀

$$ff'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Q 16. On rappelle qu'on avait décidé de noter $\omega := \sqrt{3}/2$.

Les applications de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t - \varphi) e^{-t/2}$ sont facilement de carré intégrable sur $\mathbf{R}^+$, ainsi que toutes leurs dérivées. Moralement, on sent bien qu'il va en être autrement pour $h(t) = \cos(\omega t - \varphi) e^{t/2}$: même si une telle fonction passe régulièrement par zéro, elle prend de grandes valeurs sur des zones pas trop petites, donc elle ne peut être de carré intégrable.

Remarque 2 On rappelle que vous avez déjà rencontré des fonctions qui étaient intégrables, bien que prenant des valeurs arbitrairement grandes au voisinage de $+\infty$, donc il faut tout de même se méfier.

Il s'agit de montrer que $H : x \mapsto \int_0^x h(t)^2 dt$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (l'existence d'une limite dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ étant acquise). Pour cela, on note que $\cos^2(\omega t - \varphi) \geq \frac{1}{2}$ dès que $\omega t - \varphi$ est dans un intervalle de la forme $[n\pi - \pi/4, n\pi + \pi/4]$. Notons alors $\alpha_n = \frac{1}{\omega} (n\pi - \frac{\pi}{4} + \varphi)$ et $\beta_n = \frac{1}{\omega} (n\pi + \frac{\pi}{4} + \varphi)$. Pour tout $t \in [\alpha_n; \beta_n]$, on a $h(t)^2 \geq e^t \geq e^{\alpha_n}$, donc :

$$H(\beta_n) \geq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{e^{\alpha_n}}{2} = (\beta_n - \alpha_n) \frac{e^{\alpha_n}}{2} = \frac{\pi}{4\omega} e^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Ainsi, $\int_0^x h^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et notamment

$$t \mapsto \cos(\omega t - \varphi) e^{t/2} \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbf{R}^+.$$

Pour qu'une solution de (2) soit dans E , on a vu qu'il suffisait qu'elle soit de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t - \varphi) e^{-t/2}$. Mais le calcul précédent nous assure que c'est nécessaire : la somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable, donc si $f : t \mapsto A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) e^{-t/2} + A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) e^{t/2}$ est de carré intégrable, alors la différence $t \mapsto f(t) - A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) e^{-t/2}$ l'est aussi, donc $A_2 = 0$.

Les solutions de (2) qui sont dans E sont les applications de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t - \varphi)$.

Remarque 3 (À propos du minimum de J) Il peut être intéressant d'établir le résultat admis dans l'énoncé. Les outils sont essentiellement de même nature : des intégrations par parties, en prenant comme scalpels des fonctions de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbf{R}$, nulles en dehors d'un segment de $\mathbf{R}_*^+$ (pour pouvoir annuler les termes de bords les des zipépés). De telle fonctions se construisent sur le même modèle qu'à la question 5.

Q 17. La condition d'Euler-Lagrange impose à f d'être solution de (2). Puisque f doit également être dans E , f doit être dans le plan engendré par e_1 et e_2 d'après la question 16. Ces deux fonctions sont combinaisons linéaires de $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{i^2 t}$, deux solutions de $y'' + y' + y = 0$, donc par linéarité, il en va de même pour f .

$$f \text{ est solution sur } \mathbf{R}^+ \text{ de } y'' + y' + y = 0.$$

Le calcul généreusement fourni par l'énoncé donne : $J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{1}{4} (\alpha + \beta \sqrt{3})^2$, donc :

- la fonction J est à valeurs positives;
- elle présente un minimum (qui vaut 0) en $\alpha e_1 + \beta e_2$ si et seulement si $\alpha = -\beta \sqrt{3}$.

La condition $\alpha = -\beta\sqrt{3}$ est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = -2\beta \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t}_{\sin \pi/3} - \underbrace{\frac{1}{2} \sin \omega t}_{\cos \pi/3} \right) e^{-t/2} = 2\beta \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) e^{-t/2}.$$

Si J est minimale en f , alors il existe un réel λ tel que $f = \lambda\psi$.

Remarque 4 Accessoirement, on a même prouvé l'équivalence.

Q 18. Soient $f \in E$ et $A > 0$. On évalue la différence des intégrales avec plein de carrés !

$$\begin{aligned} \int_0^A (f + f' + f'')^2 - \int_0^A (f^2 - f'^2 + f''^2) &= \int_0^A \left[\underbrace{2ff'}_{(f^2)'} + 2ff'' + \underbrace{2f'f''}_{((f')^2)'} + 2f'^2 \right] \\ &= (f^2(A) - f^2(0)) + (f'^2(A) - f'^2(0)) + 2 \left(\left[ff' \right]_0^A - \int_0^A f'^2 \right) + 2 \int_0^A f'^2 \\ &= (f^2(A) + f'^2(A)) - (f^2(0) + f'^2(0)) + 2(f(A)f'(A) - f(0)f'(0)) \\ &= (f(A) + f'(A))^2 - (f(0) + f'(0))^2 \dots \end{aligned}$$

Pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \right] dx = \int_0^A \left[f(x) + f'(x) + f''(x) \right]^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2.$$

On a déjà vu que la somme de deux fonctions de carré intégrable était elle-même de carré intégrable; il en va donc de même pour $f + f' + f''$ (la question 15 nous assurant que $f' \in L^2$). Ainsi, la relation précédente nous assure dans un premier temps que $(f(A) + f'(A))^2$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. Mais dans un deuxième temps, puisque $f + f'$ est de carré intégrable, cette limite finie ne peut être que 0 (même raisonnement qu'à la question 15). Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans la relation de cette question (tous les termes possédant effectivement une limite finie) :

$$J(f) = \int_0^{+\infty} (f^2 - f'^2 + f''^2) = \int_0^{+\infty} (f + f' + f'')^2 + (f(0) + f'(0))^2 \geq 0.$$

Puisque $\psi'' + \psi' + \psi = 0$, on a :

$$J(\lambda\psi) = \lambda^2 (\psi(0) + \psi'(0))^2 = \lambda^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} \right) \right) = 0.$$

L'application positive J est nulle — et donc minimale — en tout $\lambda\psi$.

Q 19. D'après la relation établie à la question précédente, J possède un minimum en f si et seulement si $f'' + f' + f = 0$, avec $f(0) + f'(0) = 0$ (la somme de deux termes positifs est nulle si et seulement si...). Il s'agit donc de chercher, parmi les combinaisons linéaires de e_1 et e_2 , celles vérifiant cette condition.

Or, si on pose $f = \alpha e_1 + \beta e_2$, on a $f(0) + f'(0) = \alpha + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \right)$, donc $f(0) + f'(0) = 0$ si et seulement si $\alpha + \beta\sqrt{3} = 0$, et on retrouve la condition étudiée à la question 17.

La fonction J est effectivement minimale en tout $\lambda\psi$, et seulement en ces fonctions.

V Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

Q 20. Comme suggéré dans l'énoncé, on s'intéresse à $J(f_\mu)$, avec f_μ comme dans l'énoncé. On a alors $f_\mu \in E$, avec pour tout $x \geq 0$: $f'_\mu(x) = \mu f'(\mu x)$ et $f''_\mu(x) = \mu^2 f''(\mu x)$. Ainsi :

$$\forall \mu \geq 0 \quad J(f_\mu) = \int_0^{+\infty} f(\mu x)^2 dx - \mu^2 \int_0^{+\infty} f'(\mu x)^2 dx + \mu^4 \int_0^{+\infty} f''(\mu x)^2 dx.$$

Le changement de variable $y = \mu x$ fournit pour $\mu > 0$:

$$\int_0^{+\infty} f(\mu x)^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} f(y)^2 dy = \frac{\|f\|^2}{\mu}$$

et des relations équivalentes pour les deux autres intégrales. On a alors (après multiplication par $\mu > 0$) :

$$\forall \mu > 0 \quad \|f\|^2 - \|f'\|^2 \mu^2 + \|f''\|^2 \mu^4 \geq 0.$$

On se retrouve dans une situation du type « preuve de Cauchy-Schwarz », avec une quantité positive qui est peu ou prou un trinôme du second degré.

- On commence par éliminer le cas $\|f''\| = 0$, qui correspond à une application affine de carré intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Ça existe, mais il y en a peu $\ominus$ et ce cas ($f = 0$ pour être explicite) ne pose guère de problème.
- L'application $\lambda : t \mapsto \|f\|^2 - \|f'\|^2 t + \|f''\|^2 t^2$ est alors polynomiale du deuxième degré à valeurs positives... mais sur $\mathbf{R}_+^*$, pas sur $\mathbf{R}$! On ne peut donc pas conclure directement en expliquant que le discriminant est positif, ce qui est pourtant bien tentant...
Notre expression polynomiale est positive, en particulier, au point t_0 où elle admet son minimum global sur $\mathbf{R}$, et qui a le bon goût d'être positif

$$t_0 = \frac{\|f'\|^2}{2\|f''\|^2}$$

(ben oui; à force d'en croiser, on a fini par comprendre comment fonctionnent les trinômes du second degré... Un dessin est donné un peu plus bas). Ce minimum vaut :

$$\varphi(t_0) = \|f\|^2 - \|f'\|^2 \frac{\|f'\|^2}{2\|f''\|^2} + \|f''\|^2 \frac{\|f'\|^4}{4\|f''\|^4} = \frac{1}{4\|f''\|^2} (4\|f\|^2 \|f''\|^2 - \|f'\|^4).$$

Puisque cette quantité est positive, on en déduit $\|f'\|^4 \leq 4\|f\|^2 \|f''\|^2$, ce qui n'est plus très éloigné de l'objectif.

Pour tout $f \in E$, $\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \cdot \|f''\|$.

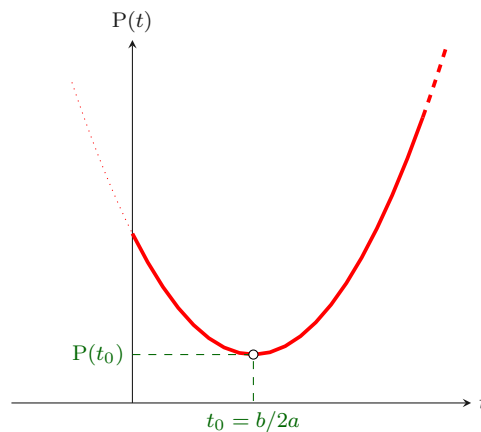


Fig. 3 — Le signe d'un trinôme du second degré $P(t) = at^2 - bt + c$, pour $a, b, c \geq 0$. Le minimum de ce trinôme est au point $t_0 = b/2a \geq 0$; le minimum sur $\mathbf{R}^+$ est donc également le minimum sur $\mathbf{R}$.

Q 21. Si $f = 0$, il y a bien entendu égalité; on exclut donc ce cas dans la suite.

Supposons qu'il y a égalité, avec $f \neq 0$. En suivant les notations de la question précédente, on a alors $\varphi(t_0) = 0$, donc en prenant $\mu_0 = \sqrt{t_0} > 0$ (c'est clair, le fait que $t_0 > 0$?), on obtient $J(f_{\mu_0}) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que $f_{\mu_0} = \lambda\psi$, et donc :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f(x) = f_{\mu_0}(x/\mu_0) = \lambda \sin(\omega t/\mu_0 - \pi/3) e^{-t/(2\mu_0)}.$$

Réciproquement : si f est du type précédent, alors f_{μ_0} est de la forme $\lambda\psi$, donc $J(f_{\mu_0}) = 0$, donc φ s'annule sur $\mathbf{R}_+^*$, donc l'inégalité de Hardy-Littlewood est alors une égalité.

Il y a égalité si et seulement si f est de la forme $x \mapsto \lambda\psi\left(\frac{x}{\mu}\right)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$.

Rapport au Jury

Remarques générales

Comme chaque année, le sujet était structuré afin de tester non seulement les connaissances des candidats mais aussi l'intégrité de leur démarche scientifique pour résoudre un problème complexe. La présence de nombreuses questions fermées « Montrer que... » permettait de poursuivre le sujet en admettant clairement un résultat intermédiaire, mais inversement, les candidats n'obtenaient pas de crédit pour énoncer la réponse qui figurait déjà dans l'énoncé. Ils étaient jugés sur la précision de leur rédaction et la complétude et l'honnêteté de leurs démonstrations.

Le problème de cette année portait sur le calcul des variations.

- La partie préliminaire **I** testait les connaissances d'algèbre linéaire ainsi que le cours sur les équations différentielles linéaires.
- La partie **II** démontrait un lemme de Du Bois-Reymond qui permettait dans la suite de transformer une équation variationnelle en une équation différentielle. Ces parties étaient l'occasion pour les candidats de montrer le sérieux de leur préparation.
- La partie **III** permettait de discuter, dans l'abstrait puis sur deux exemples, la condition d'Euler-Lagrange pour la minimisation d'une fonctionnelle définie sur l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^2([0; 1], \mathbf{R})$ et dont les valeurs sont prescrites au bord. Sans difficulté particulière, cette partie permettait de tester la capacité du candidat à construire un raisonnement.
- La partie **IV** était consacrée à l'étude d'une fonctionnelle définie sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ et dont les deux premières dérivées sont de carré sommable. La condition d'intégrabilité permettait de transformer l'équation d'Euler-Lagrange d'ordre 4 en une équation différentielle d'ordre 2 qu'on devait résoudre afin d'explicitier tous les minimiseurs. Cette partie contenait des raisonnements plus subtiles sur des questions d'intégrabilité et ne se prêtait pas du tout au grapillage.
- La partie **V** proposait, comme application, la démonstration d'une inégalité fonctionnelle de Hardy et Littlewood. En relisant attentivement les indications du sujet, cette partie pouvait être traitée en admettant les résultats antérieurs.

Remarques particulières

- **Question 1** : À quelques copies près, tous les candidats obtiennent $j^4 + j^2 + 1 = 0$.
- **Question 2** : La diagonalisation de la matrice A a souvent posé des difficultés. On attire l'attention des candidats sur le fait que la simplification des calculs n'est pas une tâche à déléguer au correcteur ! Nous sommes conscients que les candidats sont libre de choisir les vecteurs propres, mais vu la réponse de la question 1, il est surprenant d'avoir des réponses exprimées avec un polynôme en j de degré supérieur à 4 et choquant de rencontrer l'expression $j^3 - 1 = 0$ non simplifiée. Que dire alors des candidats qui proposent une matrice U avec une colonne de zéros...
- **Question 3** : Une question de cours qui fait pourtant des ravages. Pour ceux qui utilisent l'expression exponentielle, on rappelle que la solution s'écrit $X(t) = e^{tA}X_0$ et que l'exponentielle de matrice ne commute pas avec le vecteur colonne.
- **Question 4** : En posant $Y = U^{-1}X$, on obtient l'équation équivalente $Y' = DY$. Noter qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement U^{-1} . Il faut par contre exprimer les solutions en terme de X et pas se contenter d'une solution implicite en Y .
- **Question 5** : La fonction h est régulière par morceaux. Il faut étudier précisément son comportement en $t = \pm 1$. Il est surprenant que de nombreux candidats ne sachent pas tracer l'allure générale.
- **Question 6** : Choisir x_0 et x_1 est une erreur de logique grave, malheureusement trop fréquente ! On pouvait au choix proposer une formule explicite en s'inspirant de la question précédente ou bien déterminer les constantes a, b pour que le translaté/dilaté $g(t) = h(at + b)$ convienne.
- **Question 7** : Un raisonnement par l'absurde standard mais qui déroute beaucoup de candidats : par continuité, on isole un intervalle $]x_0; x_1[$ où $F > 0$, puis on choisit pour fonction u , celle construite à la question précédente (en vérifiant qu'elle est bien dans $E_{0,0}^2$!) puis conclure. Hormis les erreurs de raisonnement, une idée originale et intéressante était d'invoquer le théorème de densité de Weierstrass pour approcher F par des fonctions u . Malheureusement, si F n'est pas nulle au bord, cette méthode ne fonctionne pas. Dans ce cas, et faute de la bonne preuve, le candidat doit reconnaître son erreur plutôt que d'essayer de masquer le problème. Une autre erreur commune consiste à faire des subdivisions de l'intervalle $]0; 1[$. C'est inutile, cela masque le vrai argument et les candidats qui s'engagent dans cette voie finissent par énoncer des résultats fantaisistes sur les zéros des fonctions continues (leur structure est bien plus compliquée que l'imagination du candidat moyen !).
- **Question 8** : Il est vrai que l'intégrale d'un polynôme est une fonction polynomiale, mais ceci n'a rien à voir avec la question puisque la variable d'intégration x n'est pas la variable polynomiale t ! Cette question simple met en évidence le fait dramatique qu'une majorité de candidats ne sait pas substituer une formule dans une autre.

- **Question 9** : Beaucoup de candidats reconnaissent que l'hypothèse $q(t) \geq q(0)$ exprime un minimum du polynôme q , donc que $a_1 = q'(0) = 0$. Par contre peu savent calculer cette dérivée correctement et seules quelques copies pensent à intégrer par parties pour réutiliser la question 7 et conclure rigoureusement.
- **Question 10** : En général réussi. Trop d'erreurs de calcul sur une simple substitution.
- **Question 11** : Une question simple qui a pourtant déstabilisé beaucoup de candidats. Peu de candidats réalisent que la réponse exigeait deux parties : montrer que $J_1(f) \geq 1$ pour tout $f \in E_{0,1}^2$, par exemple en utilisant Cauchy-Schwarz et d'autre part, exhiber une fonction f particulière dans $E_{0,1}^2$ (par exemple $x \mapsto x$) en laquelle la valeur 1 est atteinte. Certains ont le réflexe des espaces vectoriels normés de dimension finie et essayent un argument de compacité ce qui est malheureusement presque toujours voué à l'échec dans les espaces fonctionnels.
- **Question 12** : La rédaction est subtile car l'équation différentielle se ramène à une équation non-linéaire $(1+3y')y'' = 0$ pour laquelle le théorème de Cauchy (-Lipschitz) n'est d'aucun secours⁷. Il faut raisonner en combinant délicatement la continuité des fonctions avec le fait qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul. Attention, trop de candidats concluent trop vite que $y = ax + b$ globalement alors que le passage du local au global mérite d'être justifié. Ensuite, les conditions au bord exigent $y = 0$. On peut aussi résoudre directement en intégrant.
- **Question 13** : Peu de candidats savent calculer... On obtient en fait $J_2(f) > 0$ donc pas de contradiction immédiate. Par contre, $J_2(\lambda f) \rightarrow -\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ et donc zéro n'est pas un minimum.
- **Question 14** : Une rédaction subtile qui fait des ravages. Beaucoup trop de candidats sont persuadés que le contraire de « ne pas tendre vers $+\infty$ » est : « avoir une limite finie », ce qui est complètement faux ! Ces candidats ont-ils jamais rencontrés la fonction $x \mapsto \sin x$ ou la suite $(-1)^n$? On pouvait utiliser Cauchy-Schwarz pour montrer que ff'' est intégrable puis raisonner par l'absurde en supposant que $ff' \rightarrow +\infty$ puis en déduire par intégration la contradiction que f^2 n'est pas intégrable.
- **Question 15** : Beaucoup de candidats obtiennent la formule

$$\int_0^x f'(t)^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) dt$$

mais peu savent l'utiliser correctement dans un raisonnement. L'idée était que si $f' \notin L^2$ alors l'intégrale de gauche tend vers $+\infty$. En utilisant la 1^{re} moitié de la question 14, on en déduit que $ff' \rightarrow \infty$, ce qui contredit la 2^e moitié de la question 14. Ceci prouve que $f' \in L^2$ et en réutilisant l'identité, que ff' a une limite à l'infini. On peut alors montrer facilement que cette limite ne peut qu'être nulle. Attention : beaucoup de candidats ne sont pas familiers avec L^2 et utilisent les réflexes des séries ℓ^2 . Il faut être conscient que la plupart des réflexes sont faux et *chercher des contre-exemples sera très formateur*.

- **Question 16** : Il s'agit d'éliminer les exponentielles croissantes dans les solutions de la question 4. Si l'idée est naturelle pour la plupart des candidats, la rédaction laisse à désirer. En particulier, beaucoup vérifient que chaque exponentielle n'est pas L^2 mais oublient que, sauf preuve du contraire, une combinaison linéaire pourrait très bien l'être !
- **Question 17** : La question précédente explicite $f = \alpha e_1 + \beta e_2$ donc il est facile de vérifier l'équation différentielle. Les indications de l'énoncé donnent $\alpha + \beta\sqrt{3} = 0$. Il reste donc à vérifier que f est un multiple de ψ .
- **Question 18** : Beaucoup ont voulu « grapiller » cette formule sans comprendre son utilité. Montrer que $(f + f')^2$ tend vers zéro à l'infini exige une rédaction subtile comme dans les questions 14 et 15. La vraie difficulté est de montrer que la limite existe. Un argument suggéré par quelques bonnes copies consiste à utiliser l'identité précédente couplée au fait que L^2 est un espace vectoriel. Une fois qu'on sait que la limite existe, on vérifie instantanément qu'elle est nulle.
- **Question 19** : Peu de candidats réalisent que la question précédente implique :

$$J(f) = (f(0) + f'(0))^2 + \int_0^x (f(t) + f'(t) + f''(t))^2 dt \geq 0$$

et qu'on trouve un minimiseur de cette somme de carrés en annulant simultanément chaque terme.

- **Question 20** : Rarement abordées, les deux dernières questions ont été traitées correctement par les meilleurs candidats. En suivant l'indication de l'énoncé, on obtient un trinôme en μ , de signe constant donc de discriminant négatif. On pouvait aussi reprendre l'identité de la question 18 $J(f_\mu) \geq 0$ puis optimiser en $\mu > 0$.
- **Question 21** : Presque aucun candidat n'a traité cette question. On peut combiner les réponses aux questions 18 et 20 pour obtenir $f(t) = \lambda \psi(t/\mu)$.

⁷Ah ah ! L'auteur n'a pas vu qu'il existe une méthode plus subtile, présentée dans ce corrigé. (Note de Walter & Stéphane.)

Conclusion et conseils aux candidats

Les correcteurs rappellent aux candidats l'importance de la rigueur de la rédaction. **En cas de questions fermée, ils doivent redoubler d'attention afin d'éliminer toute faille dans le raisonnement demandé.**

Nous attirons aussi leur attention sur le fait que la connaissance pratique du cours passe non seulement par l'apprentissage (indispensable) des énoncés et de leurs démonstrations, mais aussi par la compréhension de l'intérêt des résultats et plus encore, de leurs limites de validité. *Il est vivement conseillé d'associer, lors de l'apprentissage, chaque définition à au moins un exemple, un théorème et plusieurs contre-exemples.*

Les équations différentielles linéaires, en particulier le lien avec l'algèbre linéaire et la réduction de matrices, ainsi que les techniques de base de calcul intégral semblent trop souvent méconnues et sujettes à de multiples et graves confusions. Le sujet permettait aux candidats sérieux de montrer la qualité de leur préparation et récompensait ceux qui se sont appliqués à construire avec soin une fraction des démonstrations demandées. Les candidats ont ainsi eu l'opportunité de montrer les qualités nécessaires pour suivre avec succès une formation d'ingénieur.

Barème

Sur les calcul des variations											
Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
points	1	3	4	2+4	3	2	3	2+2	1+3	2	4
Question	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
points	4	3	2+1	2+2	3+1	1+2	2+2	2	5	4	

Total : 72 pts.