Algèbre linéaire – rappels de sup

Questions/réflexions préliminaires

stephane@gonnord.org - http://www.psi945.fr

Septembre 2020

Plan

Familles libres, génératrices

- Définition (vague ou précise) d'une famille libre, génératrice.
- Il existe une combinaison linéaire nulle non triviale si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Exemple explicite d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
    - libre et génératrice ;
    - non libre ;
    - non génératrice ;
    - libre et non génératrice.
- Même chose dans $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}_2[X]$.
- Même chose sans expliciter mais avec des dessins.
- Dans $\mathbb{R}_4[X]$, donner une famille génératrice mais liée.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, donner une famille libre non génératrice ; une famille génératrice non libre.
- Lien entre la liberté et la colinéarité pour une famille de deux vecteurs, puis trois vecteurs. Faire des dessins.

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire. Exemples entre espaces variés.
- Définir (hors linéarité) ce que sont des applications injectives, non injectives, surjectives, non surjectives.
- Donner 4 exemples d'applications linéaires (non-)injective et (non-)surjective.
- Expliciter une application linéaire injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, puis $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
- Liens entre injectivité/surjectivité et noyau/image.
- $f \circ g = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Que dire de l'image d'une famille libre par une application injective ?
- Donner quatre façons de définir une application linéaire (exemples !).

Sous-espaces vectoriels

- Définition (et/ou caractérisation). Exemples dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{10}$, $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{R}_{10}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
- Comment prouver qu'une partie de E en constitue un sev ?
- Montrer de quatre façons différentes que l'ensemble suivant est un sev de $\mathbb{R}^4$:

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,;\,x+y-z+t=0\}$$

  (et en donner une base).
- Dessiner deux sous-espaces supplémentaires. Donner la/une définition de « E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E ».
- Qu'est-ce qu'une projection ? Donner une (la) définition ainsi que quelques propriétés. Donner ensuite une propriété caractéristique.
- Relire et comprendre la question précédente !
- Idem avec les symétries.

Dimension 1/2

- Une vague définition de la dimension ?
- Si $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice et liée, alors on peut en extraire une famille de cardinal $n-1$ qui est encore génératrice.
- Si $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice et $(g_1, \dots, g_k)$ est libre, alors $k \leq n$. *Ou encore : « Si on dispose d'une famille génératrice de cardinal n, alors toute famille de cardinal* $n+1$ *est liée. »)*
- Une vague définition de la dimension ?
- Vous sauriez (vaguement) énoncer le théorème de la base incomplète ?
- Et celui « de la base trop complète » ? *(Qui dit ce qu'on peut faire d'une famille génératrice).*
- Une idée des preuves ?
- En dimension n, que dire du cardinal des familles libres ? Et génératrices ?

Dimension 2/2

- Dimension d'une somme de sous-espace (*a.k.a. Grassmann*) ? Une idée de la preuve ? Faire un dessin pour illustrer : 2+2-1=3
- Que dire des dimensions de E_1 et E_2, quand $E_1 \subset E_2$?
- Et plus précisément ?
- Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et que E est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\,(u)$ est de dimension finie égale à celle de E.
- Que dit le théorème du rang ? Lien avec ce qui précède ? Preuve ?
- « Théorèmes de fainéantise ». Citer quatre situations où la dimension permet de simplifier des preuves : deux machins à prouver (dont un pénible) deviennent : un machin simple et un argument dimensionnel.

Matrices

- Définir (y compris informellement) la matrice d'une application entre deux bases, où la matrice représentant des vecteurs dans une base.
- Que dire d'un produit matriciel (définition et propriété fondamentale pour les composées) ?
- Que représente la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$? Préciser une formule de changement de base pour une application linéaire (et/ou les coordonnées d'un vecteurs dans deux bases différentes).
- Qu'est-ce que le rang d'une matrice ? Quel est le lien avec les applications linéaires ?
- Comment calculer effectivement le rang d'une matrice ?
- Que savez-vous du déterminant d'une matrice ? Ça sert à quoi ?
- Comment calculer un noyau ? *Et une image ?*

Polynômes

- Au fait, c'est quoi un complexe ?
- Comment définir « les polynômes » ?
- Donner un lien entre $P = 2X^2 - 1$, $\alpha = 2\cos^2\theta - 1$ et $x = 2 \times 1000^2 - 1$. Promettre de ne (presque) jamais écrire $P(X)$.
- Que signifie « Trouver les racines de P » ? Résoudre $X^2 = 1$.
- Optionnel : Qu'est-ce qu'un polynôme irréductible ? Lien avec l'existence ou non d'une racine ? Que dire des irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Et dans $\mathbb{R}[X]$?
- Donner une définition et une caractérisation de la multiplicité d'une racine de polynôme.
- Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(17) = P(-42) = 0$ et $P(619) = 1515$.
- Les polynômes d'interpolation de Lagrange, ça vous parle ?
- Promettre de ne plus « passer sous même dénominateur et identifier » pour les décompositions en éléments simples.

C'est fini

Merci de votre attention

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$