1 Un développement limité

Inutile de faire semblant de découvrir ce type d'exercice : on va faire un développement asymptotique du terme général jusqu'à obtenir un terme (absolument) convergent.
Après factorisation de n dans les logarithmes, on utilisera (pour u au voisinage de 0) :

$$\ln(1+u) = u + O(u^2)$$

(on pourrait aussi écrire $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et augmenter ainsi ses chances de faire une erreur dans le calcul...)

$$\begin{aligned}
u_n = a\ln(n-1) + b\ln(n) + c\ln(n+1) &= a\ln\left(n(1-1/n)\right) + b\ln n + c\ln\left(n(1+1/n)\right)\\
&= a\left(\ln n - \frac{1}{n} + O(1/n^2)\right) + b\ln(n) + c\left(\ln n + \frac{1}{n} + O(1/n^2)\right)\\
&= (a+b+c)\ln n + (c-a)\frac{1}{n} + O(1/n^2)
\end{aligned}$$

On peut lancer la discussion :
- Si $K = a+b+c \neq 0$, alors $u_n \sim K\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a+b+c=0$:
  - si $R = c-a \neq 0$, alors $u_n \sim \dfrac{R}{n}$, et par comparaison à une série (de Riemann) divergente de signe constant, $\sum u_n$ est divergente ;
  - si $c-a=0$, alors $u_n = O(1/n^2)$ donc par comparaison à une série convergente de signe constant, $\sum u_n$ est convergente.

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\left(a\ln(n-1) + b\ln(n) + c\ln(n+1)\right) \text{ est convergente si et seulement si } a+b+c = c-a = 0.}$$

2 Produits infinis

1. Par construction, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et tous les p_n sont supérieurs à 1, et notamment strictement positifs. On peut donc en prendre le logarithme. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

   $$\ln p_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k).$$

   Puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est convergente (vers $\ell \geqslant 1$), ou $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum\ln(1+u_n)$ diverge grossièrement (et la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$), donc $\ln p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   $$\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement, alors } p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

   La continuité des applications exponentielle et logarithme nous donne ensuite l'équivalence de la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite >0 et celle de $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle-même équivalente à celle de la série $\sum(\ln p_n - \ln p_{n-1})$ c'est à dire de la série $\sum\ln(1+u_n)$. Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln(1+u_n) \sim u_n$, et par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série $\sum\ln(1+u_n)$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.
   Résumons :

— si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors (contraposée du premier point) $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (deuxième point) $\sum u_n$ converge ;

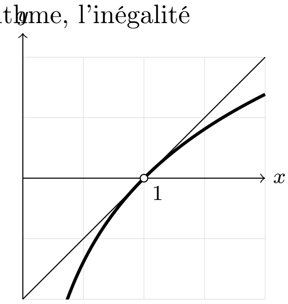
— si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et le deuxième point nous assure que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\boxed{\text{La suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2. (a) Supposons que la série $\sum u_n$ diverge. La suite de ses sommes partielles, étant décroissante, tend donc vers $-\infty$.

Or, pour tout $x \in]-1, 0]$, on a, par *concavité*[1] de la fonction logarithme, l'inégalité

$$\ln(1+x) \leqslant x$$



on en déduit que

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Le majorant tend vers $-\infty$, donc $\ln(p_n)$ également, puis :

$$\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

(b) On sait déjà que, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif, alors $\sum u_n$ converge. Supposons donc que $\sum u_n$ converge. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; notamment, la série positive $\sum -\ln(1+u_n)$ a même nature que la série positive $\sum -u_n$, donc converge. Si l'on note S sa somme, alors — *par continuité de la fonction exponentielle en* S — la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite e^S, qui est un nombre réel strictement positif.

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel strictement positif si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}}$$

3. Dans le premier cas, puisque la série $\sum 1/n$ diverge, on sait que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut d'ailleurs calculer les sommes partielles et vérifier explicitement que $p_n = 1/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans le deuxième cas, puisque $\sum 1/n^2$ converge, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit admettre une limite non nulle. Calculons les produits partiels. Pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{1-k^2}{k^2} = \prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n+1}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n+1} k \times \prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Dans le troisième cas,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{3}\frac{n+3}{n+1}$$

ce qui prouve que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{3}.}$$

4. On sait déjà que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; on peut donc écrire que $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. Or, la suite de terme général $u_n^2/2 + o(u_n^2)$ est équivalente à la suite positive de terme général $u_n^2/2$, donc est à valeurs positives (à partir d'un certain rang) et donc, par comparaison de séries positives, converge. Par conséquent, les séries $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature. En passant à l'exponentielle, comme on l'a déjà vu dans la première question :

[1] Ou encore : « c'est une inégalité classique » ou encore « en étudiant $x \mapsto x - \ln x$ ».

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite non nulle si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}}$$

5. Supposons que $\sum u_n$ converge absolument ; on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc pour n suffisamment grand, on a $|u_n| < 1$ donc $0 \leqslant u_n^2 < |u_n|$; mais la série $\sum |u_n|$ converge, la série $\sum u_n^2$ converge également par comparaison de séries à termes positifs. On conclut d'après la question précédente que :

$$\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge absolument alors } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite non nulle.}}$$

6. (a) On peut par exemple décomposer en exponentielles, ou bien utiliser les formules connues [2] de doublement du cosinus hyperbolique :

$$1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{2\mathrm{ch}^2(t/2)}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{ch}(t/2)}{\mathrm{sh}(t/2)} \times \frac{2\mathrm{sh}(t/2)\mathrm{ch}(t/2)}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \text{ on a } \frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)} = 1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.}$$

(b) Cette question doit être reliée à la question précédente. On essaye de s'y ramener — et parfois, il faut un peu tâtonner. Après quelques essais, on définit $t = \mathrm{Argch} x$, de sorte que $x = \mathrm{ch} t$ (l'énoncé a fixé $x > 1$, et nous avons défini $t > 0$). On a alors

$$v_1 = 2v_0^2 + 1 = 2x^2 + 1 = 2\mathrm{ch}^2 t + 1 = \mathrm{ch}(2t),$$

puis par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad v_k = \mathrm{ch}(2^{k-1}t).$$

On en déduit, d'après la formule de la question 3.a et grâce à quelques collisions, que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{v_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{th}(2^{k-1}t)}{\mathrm{th}(2^{k-2}t)} = \frac{\mathrm{th}(2^{n-1}t)}{\mathrm{th}(t/2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{th}(t/2)}$$

puisque $2^{n-1}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{th} = 1$. Enfin, on se ramène à la variable x en notant que

$$\frac{1}{\mathrm{th}(t/2)} = \frac{\mathrm{ch}\frac{t}{2}}{\mathrm{sh}\frac{t}{2}} = \frac{2\mathrm{ch}^2\frac{t}{2}}{2\mathrm{sh}\frac{t}{2}\mathrm{ch}\frac{t}{2}} = \frac{\mathrm{ch}t + 1}{\mathrm{sh}t} = \frac{\mathrm{ch}t+1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right) \text{ existe et vaut } \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{v_k}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Remarque : *Un résultat partiel, du style* $\dfrac{1}{\mathrm{th}\left((\mathrm{Argch}x)/2\right)}$ *est bien sûr accepté !*

7. L'astuce suivante [3] est parfois utilisée dans des exercices de séries numériques (tombés aux oraux ces dernières années !!!), vous devriez donc la retenir. On écrit

$$1 + u_n = 1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2}{2^n}\right)} = \frac{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)},$$

ce qui permet de collisionner puis prouve, puisque $\sin x \sim x$ au voisinage de 0, que :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = 4^n \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\sin^2\theta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta^2}{\sin^2\theta}.$$

$$\boxed{\text{Le produit } \prod_{k=1}^{\infty} u_k \text{ existe et vaut } \prod_{k=1}^{\infty} u_k = \tfrac{\theta^2}{\sin^2\theta}.}$$

2. Huhu !
3. Un peu à la c..., certes.