



Le 9 octobre 2021 – calculatrices interdites

1 Du cours (5 + 10 + 15 minutes)

1. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ est convergente, puis que $n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Montrer que dans un espace vectoriel, une famille (finie) de vecteurs est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
3. Soient F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie. Donner la dimension de $F + G$ en fonction de... ce que vous savez. PUIS prouver cette formule.
*Relisez la phrase précédente : je veux **d'abord** un énoncé, puis une preuve.*

2 Commutant de $\mathcal{L}(E)$ (45 minutes)

On s'intéresse ici à l'ensemble des endomorphismes d'un espace donné commutant avec tous les autres endomorphismes.

1. Le cas $n = 2$.
 - (a) On définit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Calculer les produits MN , NM , MP , PM , NP et PN .
 - (b) Expliciter deux matrices A et B telles que $AB \neq BA$.
 - (c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ commute avec toutes les autres matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (i.e. $AB = BA$) si et seulement si A est de la forme λI_2 .
 - (d) Soit E un espace de dimension 2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
2. On repasse en dimension n quelconque : déterminer les matrices commutant avec toutes les autres, puis les endomorphismes commutant avec tous les autres.
Pour information : en dimension infinie, les endomorphismes commutant avec tous les autres sont bien ceux que vous pouvez imaginer.

3 Autour des séries de Bertrand (1H45)

Peut-être qu'en cours de route, un changement de variable $u = \ln x$ pourra être intéressant...

1. *Convergences et divergences*
 - (a) Justifier simplement le fait que $\sum \frac{1}{n^2 \ln^3 n}$ est convergente et $\sum \frac{\ln^5 n}{\sqrt{n}}$ est divergente.
 - (b) Montrer que la série de terme général $\sum \frac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ est convergente (on pourra comparer $\frac{(\ln n)^{10}}{n^2}$ et $\frac{1}{n^{3/2}}$).
 - (c) Que dire de la série $\sum \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^{999}}$? (On pourra comparer le terme général à $\frac{1}{n^{3/4}}$)
 - (d) À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge.

- (e) Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien : ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. Des estimations de sommes partielles et restes
- (a) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$

On commencera par faire un dessin conduisant (pour des valeurs de k à préciser) à un encadrement de $\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$ par deux intégrales ; encadrement qu'on prouvera. Ensuite on sommerá, etc...

- (b) Même chose avec $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha \in]0, 1[$.
- (c) Établir un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Ici, on passera par un encadrement de $\sum_{k=n}^N$, encadrement qu'on exploitera avec soin...

- (d) Même chose avec $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$, avec $\alpha > 1$.
- (e) Donner finalement un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

4 Formule d'inversion de Pascal (45 minutes)

On va montrer ici que deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

Dans les deux premières questions et seulement elles, n est fixé et Φ désigne l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, \quad \Phi(P) = P(X+1)$$

(attention, P DE $X+1$, pas P FOIS $X+1$).

- Montrer que Φ est un automorphisme (application linéaires bijective d'un espace dans lui-même) de E en exhibant $\Psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \text{Id}_E$.
On explicitera, pour $P \in E$, la valeur de $\Psi(P)$.
- Déterminer les matrices A et B de Φ et Ψ dans la base canonique de E . Que dire de ces deux matrices (l'une vis-à-vis de l'autre) ?
- On suppose ici :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_k$$

Traduire ces relations matriciellement (à n fixé, écrire les relations aux rangs $0, 1, \dots, n$), et en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k.$$

- Prouver la réciproque.