Séries numériques

1. Définitions :
   - $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$) converge lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   - Lorsque $\sum u_n$ converge, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la limite des sommes partielles.

     $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$) existe donc toujours, mais pas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   - $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum |u_n|$ converge.
   - Le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$, avec $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

     Ce produit existe toujours ; il n'est pas question de convergence.
2. Théorèmes :
   - Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

     Si (u_n) ne converge pas vers 0 (divergence, ou convergence vers autre chose), on parle de divergence grossière de $\sum u_n$.
   - (u_n) converge si et seulement si $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
   - D'Alembert : différentes formes suites/séries :
     - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ tel que $|\ell| < 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; et si $|\ell| > 1$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
     - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ tel que $|\ell| < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
     - (beurk, et pour plus tard) Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$.
   - Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant, alors :
     - $\sum u_n$ converge ;
     - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1}, avec $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

     Ou encore : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs convergeant vers 0 en décroissant, alors $\sum(-1)^n v_n$...
   - $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   - Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ aussi : *convergence absolue implique convergence tout court.*
   - Théorèmes de comparaison (à une série à termes positifs) :
     - Si $u_n = O(v_n)$ (ou $o(v_n)$), $v_n > 0$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.
     - Si $u_n \sim v_n$, $v_n > 0$, alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.
     - Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
   - Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument** convergentes, alors leur produit de Cauchy aussi, avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

3. Connaître/savoir faire aussi :
   - Comparaisons somme-intégrale pour prouver les convergences (majorations), divergences (minorations) ou évaluer des restes (encadrements). Cas des séries de Riemann.
   - $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \dfrac{1}{q^n} = \dfrac{q^N}{1-q}$ si $|q| < 1$. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
   - À la marge : $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ à savoir traiter via (indication donnée) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.