Psi 999 – 2021/2022
http://www.psi945.fr

DM 5 – corrigé

À rendre le lundi 8 novembre 2021

1 Nilpotents en petite dimension

1. Soit p l'indice de nilpotence de u. Par définition, $u^{p-1} \neq 0$. On choisit alors x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, et on montre de façon classique que $\big(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre : on part pour cela d'une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0.$$

En appliquant u^{p-1}, tous les termes disparaissent sauf le premier, et on obtient ainsi $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$ puis $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. En appliquant u^{p-2} à la combinaison linéaire initiale (libérée dorénavant de son premier terme), on obtient de la même façon $\lambda_1 = 0$. On voit alors vaguement poindre une récurrence.
Bon allez, rédigeons là...
— On définit, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la proposition $\mathcal{P}(k)$: « $\lambda_k = 0$ ».
— $\mathcal{P}(0)$ a été prouvée plus haut.
— Supposons $\mathcal{P}(0), ..., \mathcal{P}(k)$ vérifiées, pour un certain $k \in [\![0, p-2]\!]$. On a alors

$$\lambda_{k+1} u^{k+1}(x_0) + \lambda_{k+2} u^{k+2}(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0.$$

En appliquant u^{p-k-2}, on obtient $\lambda_{k+1} u^{p-1}(x_0)$, puis $\lambda_{k+1} = 0$, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.
— Le principe de récurrence (avec prédécesseurs) nous assure que $\mathcal{P}(k)$ est bien vérifiée pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, prouvant ainsi la liberté de $\big(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0)\big)$
Ainsi, la famille précédente est libre, de cardinal p dans un espace de dimension finie, donc :

$$\boxed{p \leqslant \dim E.}$$

Comme toujours, on aurait pu remplacer la récurrence avec prédécesseurs par une récurrence « simple » en prenant comme proposition $\mathcal{Q}(k)$: « $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ ». On pouvait aussi zapper la récurrence en raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe au moins un des λ_i qui n'est pas nul, et on prend i_0 le plus petit indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$; etc.

2. Soit $y \in \operatorname{Im}(u^{p-1})$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = u^{p-1}(x)$. On a donc $u(y) = u^p(x) = 0$, donc $y \in \operatorname{Ker} u$. On a bien montré que $\operatorname{Im}(u^{p-1})$ est un sous-espace de $\operatorname{Ker} u$.
D'une manière générale, $v \circ w = 0$ se traduit $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} v$, ce qui donnait ici le résultat avec $u \circ u^{p-1} = 0$.
Bien entendu, $\operatorname{Im}(u^{p-1})$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, sans quoi u^{p-1} serait l'endomorphisme nul, ce qui est exclu par définition de l'ordre de nilpotence.

$$\boxed{\operatorname{Im}(u^{p-1}) \text{ est un sous-espace de } \operatorname{Ker}(u) \text{ non réduit à } \{0\}.}$$

3. L'ordre de nilpotence de u est majoré par 2 (première question) et est strictement plus grand que 1 (car $u \neq 0$), donc vaut 2. On sait alors qu'il existe x_0 tel que $\mathcal{E} = (x_0, u(x_0))$ soit une base de E. La matrice de u dans cette base vaut alors par définition (puisque $u(u(x_0)) = 0$) : $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais si on a la bonne idée de considérer plutôt $\mathcal{E}_1 = (u(x_0), x_0)$, on obtient la matrice attendue.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

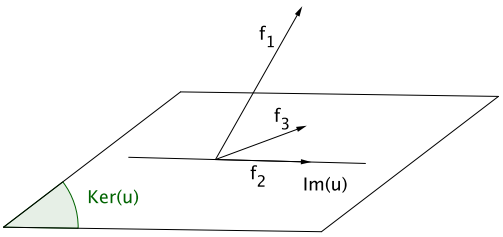
4. (a) L'ordre de nilpotence est majoré par 3 d'après la première question, et est strictement plus grand que 1 car $u \neq 0$, ce qui laisse peu de choix.

L'ordre de nilpotence de u vaut 2 ou 3.

(b) Ici, $u^2 = 0$, donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, et le théorème du rang nous assure que la somme des dimensions de ces deux sous-espaces non-nuls vaut 3, ce qui impose : $\operatorname{Im} u$ est de dimension 1 et $\operatorname{Ker} u$ de dimension 2. L'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ est donc stricte.

$$\boxed{\operatorname{Im} u \subsetneq \operatorname{Ker} u}$$

On peut maintenant (après avoir fait un petit dessin, bien entendu) choisir f_1 en dehors de $\operatorname{Ker} u$, noter $f_2 = u(f_1)$, et prendre f_3 dans $\operatorname{Ker} u \setminus \operatorname{Im} u$ (attention, tout est dans l'ordre du casting).



On montre ensuite que (f_1, f_2, f_3) est une base de E, en partant d'une combinaison linéaire nulle :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0.$$

$f_2 \in \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, et $f_3 \in \operatorname{Ker} u$ par définition, donc en appliquant u à la combinaison linéaire, on trouve $\lambda_1 u(f_1) = 0$, puis $\lambda_1 = 0$, puisque $f_1 \notin \operatorname{Ker} u$. On a donc $\lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Si (λ_2, λ_3) était non nul, la famille (f_2, f_3) serait alors liée, mais f_2 est un vecteur non-nul de la droite $\operatorname{Im} u$, donc f_3 appartiendrait à cette droite, ce qui est absurde puisque $f_3 \notin \operatorname{Im} u$. Ainsi, $(\lambda_2, \lambda_3) = (0, 0)$, ce qui termine la preuve de la liberté. Il reste à voir que dans la base $\mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3)$, on a $\underset{\mathcal{E}}{\operatorname{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et il suffit donc de prendre $\mathcal{E}_1 = (f_2, f_1, f_3)$ pour avoir la matrice souhaitée.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } \underset{\mathcal{E}_1}{\operatorname{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On aurait pu commencer la question par une analyse *: on cherche une base (g_1, g_2, g_3) telle que $u(g_1) = 0$, $u(g_2) = g_1$ et $u(g_3) = 0$. Ceci impose de prendre de prendre g_2 en dehors du noyau, puis $g_1 = u(g_2)$, puis g_3 un autre élément du noyau non colinéaire à g_1 ; fin de l'analyse. Passons à la* synthèse *: le noyau étant différent de E, on peut fixer g_2 en dehors. On définit alors $g_1 = u(g_2)$, et puisque l'image est strictement incluse dans le noyau, il existe bien $g_3 \in \operatorname{Ker}(u) \setminus \operatorname{Im}(u)$. On vérifie alors (comme plus haut) que (g_1, g_2, g_3) est bien une base de E...*

(c) L'ordre de nilpotence vaut ici 3, donc d'après la première question, on peut trouver $x_0 \in E$ tel que $\big(x_0, u(x_0), u^2(x_0)\big)$ soit libre, donc constitue une base de E. Il reste à prendre $\mathcal{E} = \big(u^2(x_0), u(x_0), x_0\big)$ pour avoir le résultat attendu.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(d) Les matrices N_1 et N_2 ont deux rangs différents, donc ne sauraient représenter le même endomorphismes, même dans des bases différentes.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas } v \in \mathcal{L}(E) \text{ et deux bases } \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{F} \text{ telles que } \operatorname{Mat}(v, \mathcal{E}) = N_1 \text{ et } \operatorname{Mat}(v, \mathcal{F}) = N_2.}$$

5. (a) — N_1 est clairement de rang 3 ; par ailleurs, $N_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N_1^4 = 0$, donc N_1 est nilpotente d'ordre 4.

— N_2 est de rang 2, $N_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N_2^3 = 0$, donc N_2 est nilpotente d'ordre 3.
— N_3 est de rang 1, et $N_3^2 = 0$ donc N_3 est nilpotente d'ordre 2.
— Enfin, N_4 est de rang 2, et $N_4^2 = 0$, donc N_4 est nilpotente d'ordre 2.

Matrice	Rang	Ordre
N_1	3	4
N_2	2	3
N_3	1	2
N_4	2	2

(b) Le rang de u est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base, ce qui exclut la possibilité d'avoir deux bases dans lesquelles les matrices de u ont des rangs différents.

Les matrices N_1 et N_2 ne peuvent représenter le même endomorphisme.

(c) L'argument précédent fonctionne pour tous les couples (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, sauf pour $(2, 4)$, puisque N_2 et N_4 ont toutes les deux le même rang. Cependant, l'ordre de nilpotence de u est celui de sa matrice dans n'importe quelle base (clair, non ?). Comme les ordres de nilpotence de N_2 et N_4 sont différents, il est impossible pour u d'être représenté par ces deux matrices dans des bases différentes.

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, les matrices N_i et N_j ne peuvent représenter le même endomorphisme.

(d) **Je laisse dans un premier temps une rédaction basée sur une discussion sur le rang et l'ordre de nilpotence de $u \in \mathcal{L}(E)$. La discussion principale portera sur l'ordre de nilpotence, qui est entre 2 et 4. Suivra une deuxième attaque qui se généralise pour l'étude des nilpotent en dimension quelconque.**

i. Supposons que u est nilpotent d'ordre 4 : en prenant x_0 en dehors du noyau de u^3 ainsi que ses images par u, u^2 et u^3, on trouve une base (première question) dans laquelle (en inversant l'ordre des vecteurs) la matrice de u est N_1.

ii. Supposons que u est nilpotent d'ordre 2 : l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$ (venant du fait que $u \circ u = 0$) nous donne, grâce au théorème du rang : $\mathrm{rg}(u) \leqslant 4 - \mathrm{rg}(u)$, donc u est de rang 1 ou 2.

A. Si u est de rang 2, alors l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$ est en fait une égalité du fait des dimensions. Prenons alors (f_2, f_4) une base d'*un supplémentaire* de $\mathrm{Ker}\,(u)$, et notons $f_1 = u(f_2)$ et $f_3 = u(f_4)$. Il est aisé [1] de montrer que $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_4)$ constitue une base de E, et par construction, on a bien $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = N_4$.

B. Si u est de rang 1. On a alors $\mathrm{Im}\,(u) \subsetneq \mathrm{Ker}\,u$, les dimensions étant connues. On veut trouver une base dans laquelle la matrice de u est N_3. En regardant droit dans les yeux N_3 (analyse), il est alors naturel de choisir (synthèse) f_2 en dehors du noyau de u, poser $f_1 = u(f_2)$, et compléter ce vecteur (non-nul) de $\mathrm{Ker}\,(u)$ en une base (f_1, f_3, f_4) de $\mathrm{Ker}\,(u)$. On montre alors sans problème que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est N_3 comme espéré.

iii. Supposons que u est nilpotent d'ordre 3. On veut montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est N_2. En prenant un vecteur x_0 en dehors du noyau de u^2, on trouve une famille libre de trois vecteurs $\big(x_0, u(x_0), u^2(x_0)\big)$, ce qui constitue un bon début ! Mais il faut trouver un élément du noyau de u qui ne soit pas combinaison linéaire des trois premiers vecteurs. Commençons par montrer que u est de rang 2. C'est essentiellement lié à la convexité de la suite des dimensions des images itérées (ou la concavité de la suite des dimensions des noyaux...). Mais rédigeons-le à nouveau.

D'après la remarque préliminaire, on a $\{0\} \subsetneq \mathrm{Im}\,(u^2) \subsetneq \mathrm{Im}\,(u)$, donc $\mathrm{Im}\,u$ est de dimension au moins 2, et $\mathrm{Ker}\,u$ est de dimension au plus 2. On a $\mathrm{Im}\,(u^2) = \mathrm{Im}\,(u|_{\mathrm{Im}\,(u)})$, donc le théorème du rang appliqué à $u|_{\mathrm{Im}\,(u)}$ (dont le noyau est $\mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(u)$) fournit :

$$\mathrm{rg}u^2 = \mathrm{rg}u - \dim\left(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u\right).$$

1. Mais instructif...

Si $\mathrm{Ker}\,(u)$ était de dimension 1, on aurait $\mathrm{rg}(u^2) \geqslant \mathrm{rg}u - 1 = 3$, rendant impossible l'inclusion $\mathrm{Im}\,(u^2) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$ (qui vient du fait que $u \circ u^2 = 0$).

Ainsi, u est bien de rang 2.

(Et le plus dur est fait !)

Si on note F l'espace engendré par $\big(x_0, u(x_0), u^2(x_0)\big)$, on a $\mathrm{Ker}\,(u) \cap F = \mathrm{Vect}(u^2(x_0))$, donc $\mathrm{Ker}\,u$ (qui est de dimension 2) n'est pas inclus dans F.

Fixons donc $f_4 \in \mathrm{Ker}\,(u) \setminus F$, et notons $f_3 = x_0$, $f_2 = u(x_0)$ et $f_1 = u^2(x_0)$. De façon claire, on a $u(f_1) = 0$, $u(f_2) = f_1$, $u(f_3) = f_2$ et $u(f_4) = 0$. Il reste à prouver que $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_4)$ est une base, ce qui est équivalent à sa liberté. Supposons donc : $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_4 f_4 = 0$. En appliquant u, on trouve $\lambda_2 f_1 + \lambda_3 f_2 = 0$. Mais (f_1, f_2, f_3) est libre, donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il reste alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_4 f_4 = 0$. Mais f_1 est un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,u \cap F$, alors que f_4 n'appartient pas à F, donc f_1 et f_4 ne sont pas colinéaires, ce qui prouve : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et termine la preuve de la liberté de $\mathcal{F}$. Par construction de cette base, on a alors bien $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{F}) = N_2$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est non nulle et nilpotente, alors elle est représentée par l'une des N_i.

Voici maintenant une deuxième approche, qui se généralise mieux et permet d'obtenir en dimension quelconque ce qu'on appelle la réduction de Jordan.

On se souvient que pour montrer que les nilpotents sont diagonalisables, on a regardé droit dans les yeux la suite d'inclusion

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u^{k-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u^k) = E$$

et on a construit une « base télescopique » en partant de la gauche vers la droite (on prend une base du noyau qu'on complète en une base de $\mathrm{Ker}\,(u^2)$, qu'on complète en une base de $\mathrm{Ker}\,(u^3)$, etc).

Et bien nous allons à nouveau partir de cette suite... mais dans l'autre sens ! Le premier point technique dont nous avons besoin est le fait que les dimensions $d_k = \mathrm{Ker}\,(u^k)$ constituent certes une suite croissante (c'est trivial, du fait des inclusions), mais également « concave », i.e. : $d_{k+2} - d_{k+1} \leqslant d_{k+1} - d_k$ (ce fait vu en exercice de cours a été établi en appliquant le théorème du rang à la restriction de u à l'image de u^k...). Ici, les suites possibles sont donc (on s'arrête une fois arrivé à 4) :

$$(0,1,2,3,4); \qquad (0,2,3,4); \qquad (0,2,4); \qquad (0,3,4)$$

L'idée centrale consiste alors à partir d'un supplémentaire S_1 de $\mathrm{Ker}\,(u^{k-1})$ dans $\mathrm{Ker}\,(u^k) = E$, dont on prend une base $(e_1, ..., e_k)$. Les $u(e_i)$ constituent alors une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(u^{k-1})$, dont l'intersection (du sous-espace engendré) avec $\mathrm{Ker}\,(u^{k-2})$ est triviale (check it !). On peut alors compléter la famille des $u(e_i)$ avec des vecteurs $f_1, ..., f_r$ pour obtenir une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u^{k-2})$ dans $\mathrm{Ker}\,(u^{k-1})$. On regarde alors l'image par u de cette famille de $k + r$ vecteurs : ils constituent une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(u^{k-2})$ dont l'intersection avec... Mais voyons cela concrètement en dimension 4 :

— **Cas** $(0,1,2,3,4)$**.** on choisit $e_1 \in E \setminus \mathrm{Ker}\,(u^3)$. La famille $(e_1, u(e_1), u^2(e_1), u^3(e_1))$ est alors une base de E, et la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour préciser le lien avec la construciton signalée plus haut, on :

$$\begin{aligned} \{0\} \quad &\subsetneq \quad \mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}(u^3(e_1)) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Vect}(u^3(e_1), u^2(e_1)) \\ &\subsetneq \quad \mathrm{Ker}\,(u^3) = \mathrm{Vect}(u^3(e_1), u^2(e_1), u(e_1)) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u^4) = \mathrm{Vect}(u^3(e_1), u^2(e_1), u(e_1), e_1) = E \end{aligned}$$

— **Cas** $(0,2,3,4)$**.** On prend e_1 dans $E \setminus \mathrm{Ker}\,(u^2)$; on a alors $E = \mathrm{Ker}\,(u^2) \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$ mais aussi $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Vect}(e_1, u(e_1))$; on complète $(u^2(e_1))$ en une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ avec un vecteur f_1. La famille $(e_1, u(e_1), u^2(e_1), f_1)$ est alors une base de E dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Cas** $(0,2,4)$**.** Cette fois, on choisit deux vecteurs e_1 et e_2 constituant un supplémentaire du noyau de u. On a alors $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2))$ qui est libre, puis constitue une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Cas** $(0,3,4)$**.** On choisit un vecteur e_1 en dehors de $\mathrm{Ker}\,(u)$; son image par u est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(u)$ qu'on peut compléter en une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ avec deux vectuers f_1 et f_2. La famille $(e_1, u(e_1), f_1, f_2)$ est alors une base de E dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. (a) Raisonnons géométriquement, en notant u l'application linéaire canoniquement associée à A. Si $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_5)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^5$, alors **on a** :

$$u(e_1) = 0 \quad u(e_2) = e_1 \quad u(e_3) = e_2 \quad u(e_4) = 0 \quad u(e_5) = e_4.$$

On cherche par ailleurs (analyse) une base $\mathcal{F}$ telle que

$$u(f_1) = 0 \quad u(f_2) = f_1 \quad u(f_3) = 0 \quad u(f_4) = f_3 \quad u(f_5) = f_4.$$

De façon plus graphique, **on a**

e5 ⟶ e4

e3 ⟶ e2 ⟶ e1

et **on veut**

f2 ⟶ f1

f5 ⟶ f4 ⟶ f3

Considérons donc la famille $\mathcal{F} = (e_4, e_5, e_1, e_2, e_3)$.
— C'est bien une base de E !
— La matrice de u dans cette base... est bien B.

$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$

Pour les matricieux, j'imagine qu'on doit avoir $B = P^{-1}AP$, pour peu qu'on prenne (on pense au changement de base vu plus haut) :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) En s'inspirant de la question 5, on peut raisonnablement penser aux matrices :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_6 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déjà, ces 6 matrices sont bien nilpotentes. Ensuite, elles ne sont pas semblables : il suffit pour cela d'évaluer pour chacune d'une part le rang, et d'autre part l'ordre de nilpotence :

Matrice	Rang	Ordre
N_1	4	5
N_2	3	4
N_3	2	3
N_4	1	2
N_5	3	3
N_6	2	2

Le caractère non semblable se déduit du tableau précédent et d'arguments déjà vus : deux matrices (nilpotentes) semblables on nécessairement même rang et même ordre de nilpotence.

Il existe au moins 6 classes de similitudes chez les nilpotents non nuls en dimension 5.

Et à la question qui vous brûle les lèvres, la réponse est : « Oui, on les a bien toutes ». Vous pourrez le prouver en adaptant la preuve vue en dimansion 4*, les dimensions possibles pour les noyaux itérés étant cette fois :*

$$(0,1,2,3,4,5); \qquad (0,2,3,4,5); \qquad (0,2,4,5); \qquad (0,3,4,5); \qquad (0,3,5); \qquad (0,4,5)$$

2 Des constructions explicites

1. (a) Il suffit de vérifier que $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ est de rang 3 :

$$\dim(H) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -10 \\ 4 & 8 & -15 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

(on a choisi de pivoter sur les colonnes, mais on aurait pu tout aussi bien choisir les lignes ; on a par ailleurs fait des dilatations de colonnes pour y voir plus clair). Ainsi, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 :

H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

(b) Un vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t)$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ si et seulement si le rang de la famille $\mathcal{G} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{v})$ vaut 3. Or, en adaptant le calcul précédent :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{G}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 3 & -3 & 2 & z \\ 4 & 4 & 1 & t \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & y-2x \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -3 & t-4x \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & z-3x \\ 4 & 2 & -1 & t-2y \end{pmatrix}$$

Ce rang vaut 3 si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z-3x \\ t-2y \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $2(t-2y) = z-3x$: on tient notre condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{v}$ soit dans H.

H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto -3x + 4y + z - 2t$.

(c) $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, 0)$ n'est pas dans H (il n'est pas dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$), donc $\mathbb{R}e_1$ constituera un supplémentaire pour H (intersection et dimensions...).

La droite engendrée par $(1, 0, 0, 0)$ constitue un supplémentaire de H.

(d) $\overrightarrow{f} = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ si et seulement si $\mathcal{H} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f}\right)$ est de rang 2. On calcule donc le rang par opérations élémentaires :

$$\text{rg}(\mathcal{H}) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & -3 & z \\ 4 & 4 & t \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & y-2x \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-4x \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & z-3x \\ 4 & 2 & t-2y \end{pmatrix}$$

ce rang vaut 2 si et seulement si $z - 3x = 0$ et $t - 2y = 0$.

$$\boxed{(x, y, z, t) \in \text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \text{ si et seulement si } 3x = z \text{ et } 2y = t.}$$

On note que $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ vérifient effectivement ces conditions ! C'est rassurant...

(e) Les habitants de $\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g})$ sont les éléments de E qui s'écrivent sous la forme $\alpha\overrightarrow{f_3} + \beta\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 4\alpha - \beta \\ 3\alpha - 5\beta \\ 2\alpha + 7\beta \\ \alpha - 5\beta \end{pmatrix}$ tout en respectant les équations de $\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ établies à la question précédente, ce qui revient ici (faire les calculs !) à $\alpha = \beta$. On a donc :

$$\boxed{\text{Vect}(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) \cap \text{Vect}(\overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{g}) = \text{Vect}(\overrightarrow{f_3} + \overrightarrow{g}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

2. On pivote sur les colonnes de la matrice représentant initialement les trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. À chaque étape, les colonnes représentent encore (dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$) une famille génératrice de l'espace engendré par les trois vecteurs initiaux.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors [2] après ces deux étapes que le troisième vecteur était combinaison linéaire des deux précédents, et que pour trouver une base de $\mathbb{R}^5$, il suffit de compléter les deux premiers par $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$ (éléments usuels de la base canonique ; on a alors une matrice triangulaire).

$$\boxed{\text{Un supplémentaire du sous-espace proposé est } \text{Vect}(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5}).}$$

3. Même principe que dans la question précédente : on représente les polynômes dans la base canonique, et on pivote sur les colonnes. On continue donc de représenter des combinaisons linéaires de ces vecteurs dans la base canonique.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après deux étapes, on voit que P_3 est combinaison linéaire de P_1 et P_2, que (P_1, P_2, P_4) est libre (et constitue donc une base de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4)$, soit encore une famille libre maximale) et peut être complétée en une base de E en ajoutant X^2 et X^4.

$$\boxed{(P_1, P_2, P_4) \text{ est une sous-famille libre maximale de } \mathcal{F}, \text{ et } (X^2, X^4) \text{ la complète en une base de } G.}$$

2. Si on a bien compris le sens des opérations élémentaires : que représentent les différentes colonnes ?