$\alpha\beta$ Ω_n, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \dots$

Bonjour !

AFK : café.

Exercice 36 – *Centrale 2016 [6/10]*

$x = -\frac{1}{2}$: intég la DL

1. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t^{x-1}e^{-t}}\,dt$ est convergente.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.
4. Montrer que pour tout $\cancel{x > 0}$, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est convergente.
5. Montrer que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

   $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

$$\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$f(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

$x = 10$

$t^9 e^{-t}$

$x = \frac{1}{2}$

$t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

Soit $x > 0$. $g : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$

g est continue sur $]0, 1]$

Intég en 0 ? • Si $x > 1$: $x - 1 > 0$ donc $g(t) \to 0$

donc g est intég sur $]0, 1]$

• Si $x = 1$ $\quad g(t) = e^{-t}$ ...

• Si $0 < x < 1$

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \qquad 1-x < 1$$

$$\sim \frac{1}{t^{1-x}}$$: intég au v(0)

$$\int_0^1 g(t)\,dt \text{ CV.}$$

$$f(x) = \int_0^1 \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{h(x,t)} \, dt$$

• $h :]0,+\infty[\times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

• $\forall x > 0$, $t \mapsto h(x,t)$ $\mathcal{C}_m(]0,1])$

• $\forall t \in]0,1]$, $x \mapsto h(x,t) \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$

• Domination ? $\quad |t^{x-1} e^{-t}| \leq \varphi(t)$, $\varphi \in L^1$

$x \in [A,B] \subset]0,+\infty[$

$x \geq A \qquad x-1 \geq A-1$

$t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$ or $\ln t \leq 0$

donc $(x-1)\ln t \leq (A-1)\ln t$

donc $t^{x-1} \leq t^{A-1}$

donc $|h(x,t)| \leq t^{A-1} e^{-t} =: \varphi(t)$

Puisque $A > 0$, $A-1 > -1$, donc φ est $L^1(]0,1])$

$\rightarrow$ on a la domination.

donc f est $\mathcal{C}([A,B])$

or ceci est vrai $\forall [A,B] \subset]0,+\infty[$ donc $f \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$

3/ $I = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!} \right) dt \overset{?}{=} \sum_0^{\infty} \int_0^1 \underbrace{\frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}}_{f_n(t)} dt$$

$$\int_0^1 t^{n+x-1}\, dt = \left[\frac{t^{n+x}}{n+x} \right]_0^1 = \frac{1}{n+x}$$

$n+x-1 > -1$

$$I = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$$

- chaque f_n est $\mathcal{C}_m(]0,1])$ et intégrable $(t^\alpha, \alpha > -1)$
- $\sum f_n$ CVS (série de l'exp)
  et $\sum_0^{\infty} f_n : x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ $\mathcal{C}_m(]0,1])$
- $\sum \underbrace{\int |f_n|}$ CV ? OUI

$$\frac{1}{n!(n+x)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

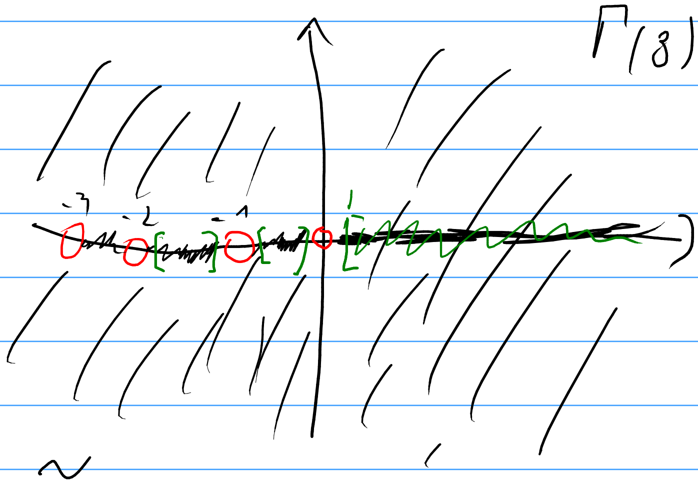
4/ $x = -\frac{5}{2}$

$$\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!(n-\frac{5}{2})}}_{\alpha_n} \qquad |\alpha_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n-972{,}12)} \leftarrow o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \leftarrow |\alpha_n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

CV A



$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

$\mathrm{Re}(z) > 0$

$$\tilde{f} : x \notin \mathbb{Z}^- \longmapsto \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}}_{f_n(x)} \text{ est } \mathcal{C}^\infty$$

$$\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^1$$

- f_n $\mathcal{C}^n$
- $\sum f_n$ CVS, $\sum f_n' \cdots \sum f_n^{(n-1)}$
- $\sum f_n^{(n)}$ CVU

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (\text{IPP})$$

$$f(x+1) = \sum \frac{(-1)^n}{(n+1+x)\,n!} = \smile + \smile + \cdots$$

$$f(x) = \sum \cdots = \smile + \smile + \cdots$$

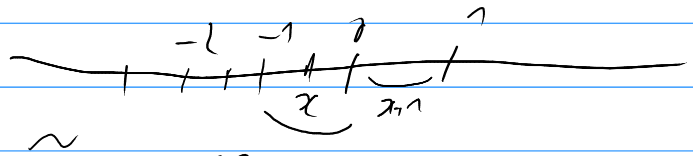
$$f(x+1) \overset{?}{=} f(x) + \frac{1}{x+1} \quad \text{) décalage}$$

$n+1=k$

$$\frac{-(-1)^k}{(k+x)(k-1)!} = -\frac{(-1)^k (k+x-x)}{(k+x)\,k!} = -\frac{(-1)^k}{k!} + x\frac{(-1)^k}{(k+x)\,k!}$$

$$\tilde{f}(x+1) = -\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}}_{e^{-1}-1} + x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)\,k!}}_{\tilde{f}(x) - \frac{1}{x}}$$

$$\left(\left(\left(\tilde f(x+1) = x\tilde f(x) - e^{-1}\right)\right)\right)$$



$\tilde f$ est $\mathcal{C}(]0,+\infty[)$ donc sur $]0,1[$

$$\tilde f(x) = \frac{1}{x}\left(\tilde f(x+1) + e^{-1}\right)$$

qd $x \in]-1,0[$, $x+1 \in]0,1[$

or $\tilde f$ est $\mathcal{C}(]0;1[)$

donc $x \mapsto \frac{1}{x}\left(\tilde f(x+1) + e^{-1}\right)$ est $\mathcal{C}^\infty(]-1,0[)$

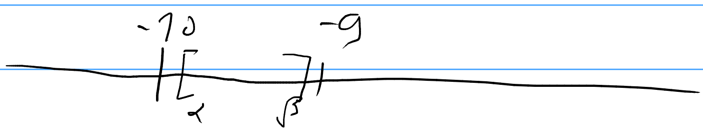
$$\boxed{\tilde f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,0[)}$$

Si $x \in]-2,-1[$, $x+1 \in]-1,0[$

$$\tilde f \text{ est } \mathcal{C}^\infty(]-2,-1[)$$

Par rec: $\tilde f \in \mathcal{C}(]-n,-n+1[)$

$$\boxed{\tilde f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-)}$$



Exo 39 :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{e^t - 1}\,dt$$

1/ déf ? $\mathcal{C}^1$?

(((Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{e^t - 1}\,dt$ cv ???

$g : t \mapsto \dfrac{\sin \alpha t}{e^t - 1} \in \mathcal{C}(]0, +\infty[)$

$e^t - 1 \neq 0$

- en $+\infty$: $|g(t)| \leq \dfrac{1}{e^t - 1} \sim e^{-t}$: L^1 au voisinage de $+\infty$

- en 0 : $\sin \alpha t \sim \alpha t$
  $e^t = 1 + t + o(t)$ donc $e^t - 1 = t + o(t) \sim t$

  donc $g(t) \sim \alpha$

  donc $g(t) \to \alpha$ donc g L^1 au voisinage de 0

donc $\int_0^{+\infty} g$ cv (puisque g est L^1).

Candidat $\mathcal{C}^1$: $h(\alpha, t) = \dfrac{\sin \alpha t}{e^t - 1}$

- $\forall \alpha$ $t \mapsto h(\alpha, t)$ est $\mathcal{C}_M(]0, +\infty[)$ et intégrable (OUI)

- $\forall t$, $\alpha \mapsto h(\alpha, t)$ est $\mathcal{C}^1$

  OUI : $\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \dfrac{t}{e^t - 1}\cos \alpha t$

  $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t)$ est $\mathcal{C}_M(]0, +\infty[)$

- $\left|\dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t)\right| \leq \varphi(t)$, φ intégrable

$$\left|\frac{t}{\underbrace{e^t-1}_{>0}}\cos \alpha t\right| \leq \varphi(t), \quad \varphi \text{ intégrable}$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\cdot,t)\right| \leq \frac{t}{e^t-1} =: \varphi(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \varphi \in \mathcal{C}(]0,+\infty[) \\ \cdot\ \varphi \longrightarrow 1 \text{ en } 0 \\ \cdot\ \varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ en } +\infty \end{array}\right) \varphi \in L^1(]0,+\infty[)$$

Le th. de dérivation des int. à paramètre s'applique : $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$

2/ $\exists a, b$; $\quad I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin \alpha t}{e^t-1}}\, dt = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha t) e^{-t} \times \underbrace{\frac{1}{1-e^{-t}}}\, dt$$

Pour $t>0$, $e^{-t}<1$ donc $\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t})^n$

donc $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-(n+1)t}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-kt}\, dt$$

$$\text{(2)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(\alpha t) e^{-kt}\, dt}_{J_k(\alpha)}$$

(1) calculer $J_k(\alpha)$

② Justifier $\sum \underbrace{\int_0^{+\infty} |\sin\alpha t \, e^{-kt}| \, dt}$

→ IPP + IPP

→ $e^{i\alpha t} = \cos\alpha t + i\sin\alpha t \Rightarrow \sin\alpha t = \mathrm{Im}(e^{i\alpha t})$

$\sin\alpha t \, e^{-kt} = \mathrm{Im}\left(e^{(-k+i\alpha)t}\right)$

"donc" $I_k(\alpha) = \int \mathrm{Im} = \mathrm{Im} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{(-k+i\alpha)t} \, dt}$

$$\int_0^T e^{(-k+i\alpha)t} \, dt = \left[\frac{e^{(-k+i\alpha)t}}{-k+i\alpha}\right]_0^T \xrightarrow[T\to+\infty]{}$$

$$= \frac{1}{-k+i\alpha}\left(-1 + \underbrace{e^{-kT}}_{\to 0} \underbrace{e^{i\alpha T}}_{|\cdot|=1}\right) \to \frac{1}{k-i\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin\alpha t \, e^{-kt} \, dt = \mathrm{Im} \frac{1}{k-i\alpha} = \mathrm{Im} \frac{k+i\alpha}{k^2+\alpha^2} = \frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}$$

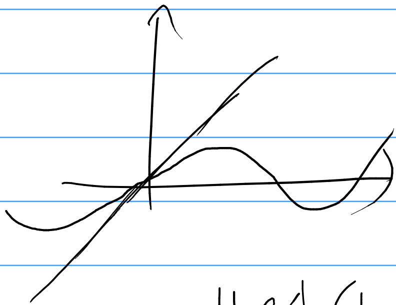
$$\boxed{I(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}}$$

$$\underbrace{\sum_k \int_0^{+\infty} \underbrace{|\sin\alpha t|}_{\leq 1} e^{-kt} \, dt}_{\leq \int_0^{+\infty} e^{-kt} \, dt = \frac{1}{k}} \text{ CV } ??$$

$\sum \frac{1}{k}$ DV : DRAME

Trop grossière !!! → il va falloir finasser...

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{|\sin \alpha t|}_{\le |\alpha t|} e^{-kt}\,dt \le \;??$$



$|\sin x| \le |x|$

$|\sin x - \sin 0| \le 1 \cdot |x - 0|$

$$|\varphi'| \le k \Rightarrow |\varphi(b) - \varphi(a)| \le k|b-a|$$

$$\int_0^{+\infty} |\sin \alpha t| e^{-kt} \le |\alpha| \underbrace{\int_0^{+\infty} t e^{-kt}\,dt}_{\text{IPP}: = \frac{1}{k^2}} = \frac{|\alpha|}{k^2}$$

comparaison ATP

$\sum \int | \; |$ CV ce qui justifie l'interversion.

$$\boxed{I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}}$$

3/ $I(\alpha) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \;??$

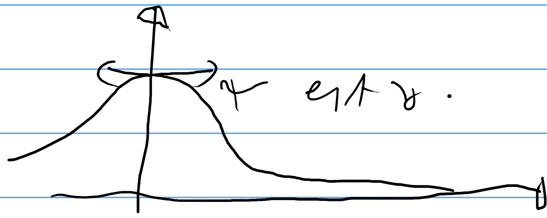
$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}}_{\underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}} \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \;?$$

Thm $\left\{ g_n(\alpha) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} h_n(\alpha) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\alpha) \sim \sum h_n(\alpha) \right.$

$\sum_n \frac{1}{\alpha}$ DV $\longrightarrow$ Pernu

Soit α_0 fixé. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+\alpha_0^2}}_{\psi(n)} \simeq ??$

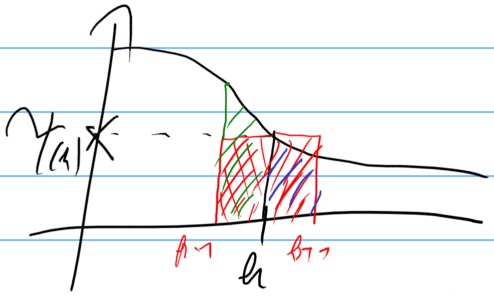
$\psi : t \longmapsto \frac{1}{t^2+\alpha_0^2}$



$\frac{1}{t^2+1}$

$t : 0 \to +\infty$

$t^2+\alpha_0^2 : \alpha_0^2 \to +\infty \qquad \psi(t) : \frac{1}{\alpha_0^2} \to 0$



$\int_n^{n+1} \psi \le \psi(n) \le \int_{n-1}^{n} \psi$

$\underbrace{t^2}_{\alpha_0^2 u^2} + \alpha_0^2 = \alpha_0^2(u^2+1)$

$\int_a^b \frac{dt}{t^2+\alpha_0^2} \to t = \alpha_0 u$

$\int \frac{dt}{t^2+\alpha_0^2} = \frac{1}{\alpha_0} \arctan\left(\frac{t}{\alpha_0}\right)$

$\int_1^{N+1} \psi \le \sum_{n=1}^{N} \psi(n) \le \int_0^N \psi$

$N \to +\infty$: $\frac{\;}{\;}C(\alpha_0) \le \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha_0^2}}_{\frac{f(\alpha_0)}{\alpha_0}} \le \frac{\;}{\;}C(\alpha_0)$

$$\frac{1}{\alpha_0}\left(\arctan\frac{N+1}{\alpha_0}-\arctan\frac{1}{\alpha_0}\right)\leq\sum_{1}^{N}\leq\frac{1}{\alpha_0}\arctan\left(\frac{N}{\alpha_0}\right)\to\infty$$

Quand $N\to+\infty$, cq les termes CV, d'où alors.

$$\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\alpha_0}\right)\leq\frac{f(\alpha_0)}{\alpha_0}\leq\frac{\pi}{2\alpha_0}$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2}-\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{\to 0}}_{\frac{\pi}{2}}\leq f(\alpha)\leq\frac{\pi}{2}$$

$$f(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to\infty]{}\frac{\pi}{2}$$

donc $\boxed{f(\alpha)\sim\frac{\pi}{2}}$