N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 01
Intégration – Résumé de cours

1 Quelques révisions de sup

Proposition 1 (Propriétés de l'intégrale sur un segment)

- Linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Inégalité triangulaire $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$ où $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.
- Une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, est nulle.

Proposition 2 (Techniques de calcul intégral)

- IPP : penser au caractère $\mathscr{C}^1$ des deux fonctions
- Changement de variables : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$ si φ est une bijection strictement monotone.

Proposition 3 (Sommes de Riemann)

Si f est continue $[0,1]$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$$

2 Premiers prolongements de l'intégrale

2.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 4

On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur un segment lorsque :

1. elle n'y admet qu'un nombre fini de points de discontinuité et
2. elle possède en chacun de ces points une limite finie à droite et à gauche.

On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.

Remarque 5

1. Toute fonction continue par morceaux sur un segment est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers. On peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment comme étant la somme des deux intégrales correspondantes.
2. On peut aussi définir l'intégrale de manière plus pratique, en sommant les intégrales sur les intervalles où la fonction est continue.
3. On ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment en changeant les valeurs de cette fonction en un nombre fini de points.

Proposition 6

Linéarité, positivité, relation de Chasles.

2.2 Fonctions à valeurs complexes

Définition 7

Continuité d'une fonction à valeurs complexes, définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Proposition 8

Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.

3 Intégrale généralisée

3.1 Définition

Définition 9

Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle $[a, +\infty[$. Si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *convergente* et on note ainsi sa limite.

Proposition 10

Si F est une primitive de f sur $[a, +\infty[$, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ équivaut au fait que F admette une limite en $+\infty$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 11 (Généralisations)

- On généralise à f définie sur $[a, b[$ et sur $]a, b]$.
- Si $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente lorsque les intégrales sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$ le sont pour (un certain/tous) c dans $]a, b[$.

Exemple 12 (Intégrales de référence)

$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$; $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$; $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$

Remarque 13

1. Cas des faux problèmes et du prolongement par continuité.
2. Linéarité, positivité, relation de Chasles et croissance.

3.2 Comparaison dans le cas positif

Proposition 14

1. L'intégrale d'une application positive et continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) converge ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (resp. $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$) est majorée sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).
2. Si $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^b g$ implique celle de $\int_a^b f$.

3.3 Comparaison dans le cas quelconque

Définition 15

Si I est un intervalle de borne inférieure (éventuellement infinie) a et de borne supérieure (éventuellement infinie) b, on dit que f est intégrable sur I lorsque $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente. (On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.)

Proposition 16

Si l'intégrale de f sur un intervalle I est absolument convergente, alors elle est convergente et $\left|\int_{\mathrm{I}} f\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f|$ (inégalité triangulaire).

Proposition 17

L'ensemble $L^1(\mathrm{I}, K)$ des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 18

Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.

Proposition 19 (Théorèmes de comparaison – proposition fondamentale)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

1. Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f.
2. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g est équivalente à celle de f.

4 Techniques d'intégration

4.1 Intégration par parties

Proposition 20 (Intégration par parties)

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b[$ et si $f(t)g(t)$ admet une limite finie en a et en b alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, avec

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

en cas de convergence.

4.2 Changement de variables

Proposition 21

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_a^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente. Et si tel est le cas, les deux intégrales sont égales.

Remarque 22

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.