TD 01
Intégrales généralisées

Exercice 1. *Un peu de sommes de Riemann.* **1.** Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ et de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$.

2. Calculer, à l'aide de sommes de Riemann, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-\mathrm{e}^{it}}$, où $z\in\mathbb{C}$ et $|z|>1$.

Exercice 2. *Convergence d'intégrales*. Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$,

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$,

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. *CCINP 2016*.

1. Trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\displaystyle\frac{2x+1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\lfloor 1/t\rfloor\mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur, en admettant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4. *CCINP 24*. Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ on pose : $\displaystyle \mathrm{I}_{n,p}=\int_0^1 x^p\ln(x)^n\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}_{n,p}$.

2. Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, trouver une relation entre $\mathrm{I}_{n,p}$ et $\mathrm{I}_{n-1,p}$.

3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 5. *Mines-Télécom 23*. **1.** Déterminer un équivalent de $\displaystyle\frac{1}{t}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

2. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 6. *Mines-Télécom 22*. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ puis étudier celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. *CCINP 23*. **1.** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $\displaystyle\mathrm{I}_n=\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$.

2. Soit $\displaystyle\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I est bien convergente.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $\displaystyle K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}K_n=\mathrm{I}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Exercice 8. *CCINP 2023*. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $J_n = n\mathrm{I}_n$ pour tout entier n.

3. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression de J_n, puis montrer que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. *Centrale 23*.
Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soit convergente. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 10. *Mines-Ponts 19, Centrale 17*. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Montrer que $\dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

3. Montrer que $f(x)$ est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; puis établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 11. *Mines-Ponts 19*.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Convergence et calcul de $\mathrm{I}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}xy)}\mathrm{d}x$.

Exercice 12. *Mines-Ponts 22*. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t$.

2. On suppose que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge.

3. Application à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ pour $a > \dfrac{1}{2}$.