DM 01
à rendre au plus tard le mercredi 11 septembre

Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x$ est convergente.

2. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(-t^2\right)$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \exp\left(-t^2\right) \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t, \mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

4. Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \mathrm{I}_n$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

7. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant v_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x$. On admet le résultat : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

8. À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

9. En posant $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \tan x$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sqrt{n} a_{2n-2}$.

10. En déduire la valeur de I.

Deux autres intégrales « à la Gauss »

11. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x$. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la valeur de I_n.

12. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose : $J_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x$.

(a) Après avoir justifié son existence, montrer que : $J_a = \displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x$.

(b) En déduire, en posant $u = t - \dfrac{a}{t}$, la valeur de J_a.