TD 02
Séries numériques

Exercice 1. *CCINP 24*. **1.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$. On note S_p la valeur de la somme.

2. En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

3. En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. *CCINP 24*. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ puis celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^n \mathrm{e}^{-n^2 t^2}\, \mathrm{d}t$.
(on vérifiera d'abord que chacun des deux termes généraux est bien défini)

Exercice 3. *CCINP 24*. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers 0.

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général w_n ?

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général x_n ?

Exercice 4. *Mines-Telecom 23*. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}\ln(n)}$?

Exercice 5. *Mines-Telecom 23*. **1.** Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

2. Établir la convergence de la série de terme général u_n^2.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

4. En admettant le lemme de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n.

Exercice 6. *Mines-Telecom 23*. Nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{\pi}{4}$?

Exercice 7. *Centrale 24*. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.

3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

Exercice 8. *Centrale 24*. Nature de la série de terme général $z_n = \sqrt{(n-1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

Exercice 9. *Mines-Ponts 23*. **1.** Montrer que $\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k^2 - 1}$ converge et calculer sa valeur.

2. Montrer que $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 10. *Mines 23*. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Étudier la série de terme général $a_n = \sin\left(\frac{2n^2 + pn - 1}{2n+1}\pi\right)$.

Exercice 11. *X 24*. Étudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence, convergence absolue).