Chapitre 02 – Séries numériques – Résumé de cours

1 Généralités

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles (définies par, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$) converge. La limite de cette suite est alors appelée somme de la série, et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On note parfois $\sum u_n$ pour parler de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas convergent, $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste de la série.

Proposition 2

Linéarité de la somme.

Proposition 3

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Proposition 4

Le terme général d'une série convergente tend nécessairement vers zéro.
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Exemple 5

La série géométrique de raison z converge si, et seulement si, $|z| < 1$.

La somme vaut alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

2 Critères de convergence

2.1 Le cas positif

Proposition 6

- Une série à termes positifs converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Point de méthode 7

Principe de comparaison série-intégrale.

Proposition 8

Séries de Riemann.

2.2 Convergence absolue et théorèmes de comparaison

Définition 9

On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 10

Toute série absolument convergente converge et vérifie : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Proposition 11

1. Si (v_n) est une suite à termes positifs et (u_n) une suite à termes complexes telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, alors la convergence de la série de terme général v_n implique la convergence de la série de terme général u_n.
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites **positives**, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence de la série de terme général u_n est équivalente à la convergence de la série de terme général v_n.
3. (généralisation) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence **absolue** de la série de terme général u_n est équivalente à la convergence **absolue** de la série de terme général v_n.

Remarque 12

On étend à « $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ». Pour montrer qu'une série converge, on peut multiplier son terme général par n^a avec $a > 1$ et montrer que le tout tend vers 0.

Proposition 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ne s'annulant jamais.

Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers une limite $\ell < 1$, la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument.

Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers une limite $\ell > 1$, la série diverge grossièrement.

 nlaillet.math@gmail.com

Exemple 14

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

3 Séries alternées

Proposition 15 (critère spécial des séries alternées)

Si (u_n) est une suite de réels positifs décroissant vers zéro, alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge. En outre, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est alors du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$

Remarque 16

Attention aux théorèmes de comparaison ! $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais les deux séries ne sont pas de même nature. Le théorème de comparaison ne fonctionne **que** pour des séries à termes positifs.

4 Produit de Cauchy

4.1 La propriété

Proposition 17

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que les séries de termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergent. Alors, en notant $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, la série de terme général $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \left(\sum_{n\geqslant 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} v_n\right).$$

Remarque 18

On retrouve le fait que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

nlaillet.math@gmail.com

4.2 Vers les familles sommables

Définition 19

Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N} (I \subset \mathbb{N})$ avec des x_i distincts. Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Proposition 20

On admet que si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$, on lui associe sa somme $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i \in [0, +\infty]$. On garde les propriétés suivantes :

- Linéarité de la somme.
- Pour tout découpage en paquets $\mathrm{I} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ de I, $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in\mathrm{I}_n} x_i \right)$.
- En particulier, $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0} a_{m,n} = \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} a_{m,n}$.

Définition 21

La famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i < \infty$.

Remarque 22

En pratique, dans le cas positif, on peut découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

Définition 23

Une famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in\mathrm{I}}$ l'est.

Remarque 24

Pour $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in\mathrm{I}}$ implique celle de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

Proposition 25

Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille sommable. Alors on a les mêmes propriétés que pour les familles sommables.