nlaillet.math@gmail.com

DM 02
à rendre au plus tard le mercredi 18 septembre
D'après oral Centrale python MP 18/oral Centrale python PSI 24

Ce problème est inspiré d'oraux de concours, notamment d'oraux de Centrale Maths II. Dans cet oral, il faut faire des simulations en python. N'hésitez pas à consulter, à ce titre, l'aide-mémoire python que j'ai mis sur cahier-de-prépa !

1. Démontrer qu'il existe un réel γ tel que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Un premier réarrangement Dans la série harmonique alternée, on prend p termes positifs, puis q négatifs, puis p positifs, et ainsi de suite... On note S_n la n-ième somme partielle de cette série et $T_k = S_{k(p+q)}$. Par exemple, pour $p = 2$ et $q = 3$, $T_2 = S_{10} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$.

3. Écrire et commenter une fonction python `S(n,p,q)` donnant la valeur de S_n. Donner les valeurs obtenues pour $n = 1000$ et $(p, q) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.

4. Trouver une expression de T_k en fonction de H_{2kp}, H_{kp} et H_{kq}.

5. En déduire la convergence de la suite (T_k), puis celle de la suite (S_n), vers une limite que l'on exprimera en fonction de p et q. Comparer avec les résultats obtenus en 3.

Une autre série alternée Soit $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

6. Montrer que la série de terme général u_n converge.

7. Proposer, en la justifiant, une méthode pour déterminer, informatiquement, une approximation numérique de la somme à 10^{-2} près. On ne demande pas nécessairement de programme explicite.

8. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k = (\ln 2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$.

9. Via une comparaison série-intégrale, montrer que pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k} = \ln(2)\ln(n) + \frac{1}{2}(\ln(2))^2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

10. Déterminer alors la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Un réarrangement d'une autre série Soit $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

11. Montrer l'existence d'un réel c tel que $V_n = 2\sqrt{n} + c + o(1)$.

12. On considère la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ dans laquelle on réordonne les termes comme dans la deuxième partie. Montrer que si $p \neq q$ alors la série obtenue est divergente.

 nlaillet.math@gmail.com

Un réarrangement plus subtil Dans la série harmonique alternée, on prend maintenant le premier terme, puis un négatif, puis 2 positifs, puis un négatif, puis 3 positifs, puis un négatif, puis 4 positifs, et ainsi de suite... On note a_n le terme général de cette suite et on note toujours $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Par exemple, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{5}$, et $S_8 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$.

13. Déterminer $\varphi(n)$ le rang du n-ième terme négatif (par exemple, $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 5$).

14. Montrer que : $S_{\varphi(n+1)} - S_{\varphi(n)} \geqslant \dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$.

15. En déduire que la limite de S_q quand q tend vers l'infini.