TD 01
Intégrales généralisées

Exercice 1. *Un peu de sommes de Riemann.* **1.** Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ et de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$.

2. Calculer, à l'aide de sommes de Riemann, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-\mathrm{e}^{it}}$, où $z \in \mathbb{C}$ et $|z|>1$.

Correction

Par le théorème de convergence des sommes de Riemann, on sait, comme $t \mapsto \dfrac{1}{z-\mathrm{e}^{it}}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z-\mathrm{e}^{it}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

Or, à n fixé, en mettant au même dénominateur,

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} &= \frac{2\pi}{n}\frac{P(z)}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(z-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)} \\ &= \frac{2\pi}{n}\frac{P(z)}{z^n-1}\end{aligned}$$

où P est le polynôme obtenu en mettant la somme de fractions au même dénominateur. Mais lorsqu'on fait cette mise au dénominateur, on remarque que P est la dérivée de z^n-1 ! Ainsi, comme $|z|>1$,

$$\frac{P(z)}{z^n-1} = \frac{nz^{n-1}}{z^n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nz^{n-1}}{z^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{z}.$$

Ainsi,

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{n}\frac{n}{z} = \frac{2\pi}{z}.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{z-\mathrm{e}^{it}} = \frac{2\pi}{z}$.

Exercice 2. *Convergence d'intégrales.* Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}$,
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. *CCINP 2016.*

1. Trouver $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction

Méthode MPSI (plus simple quand même...) On sait qu'un tel triplet (a, b, c) existe :

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

Pour déterminer a, on multiplie par x et on évalue en 0 :

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$

donc, en évaluant en 0, $1 = a$.
Ensuite, pour déterminer c, on multiplie par $(x+1)^2$ et on évalue en -1 :

$$\frac{2x+1}{x} = \frac{a(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

donc, en évaluant en -1, $1 = c$. Puis, pour déterminer b, on peut, par exemple, multiplier par x et faire tendre vers $+\infty$. On a

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$

donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, $0 = a + b$, donc $b = -1$. Finalement,

$$\boxed{\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$$

La méthode PCSI consisterait à tout mettre au même dénominateur et à faire en sorte que les coefficients des polynômes au numérateur soient les mêmes.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\lfloor 1/t \rfloor \mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur, en admettant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction

Montrer la convergence d'une intégrale, c'est déjà voir où il y a potentiellement des problèmes. Ici c'est en 0.
La fonction $f : t \mapsto t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, et on sait que pour tout t dans $]0, 1]$,

$$\frac{1}{t} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{t},$$

donc

$$1 - t \leqslant t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leqslant 1,$$

donc, en faisant tendre t vers 0 et par encadrement, on obtient que $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
Pour calculer l'intégrale, on va faire du découpage.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = k$ pour t dans $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k t dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{kt^2}{2}\right]_{1/(k+1)}^{1/k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} - \frac{k}{2(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2 - k^2}{2k(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. *CCINP 24.* Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on pose : $\mathrm{I}_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln(x)^n \mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}_{n,p}$.

Correction

Déjà, la fonction $f : x \mapsto x^p \ln(x)^n$ est continue sur $]0, 1]$. Le seul problème est en 0. *Pour montrer l'intégrabilité en 0, on va comparer à une intégrale de référence.*
On remarque que, par croissances comparées, $x^{1/2} f(x) = x^{p+1/2} \ln(x)^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, qui est intégrable en 0.
On en déduit alors, par comparaison, que f est intégrable en 0.

2. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, trouver une relation entre $\mathrm{I}_{n,p}$ et $\mathrm{I}_{n-1,p}$.

Correction

On va faire une intégration par parties. *Attention à la manière de rédiger !* Sous réserve de convergence des intégrales et du crochet, en posant $u(x) = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1}$, $u'(x) = x^p$, $v(x) = \ln(x)^n$, $v'(x) = \dfrac{n}{x}\ln(x)^{n-1}$, on a l'égalité

$$\mathrm{I}_{n,p} = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}x^{p+1}\frac{n}{x}\ln(x)^{n-1}dx.$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ par continuité, donc l'intégration par parties est licite et

$$\mathrm{I}_{n,p} = -\frac{n}{p+1}\int_0^1 x^p\ln(x)^{n-1}dx = -\frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p}.$$

Remarque : le changement de signe est cohérent avec le changement de puissance du ln.

3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Correction

Là, tout dépend de si on est à l'écrit ou à l'oral. Je vais répondre comme à l'oral. On remarque alors que

$$\mathrm{I}_{n,p} = -\frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p} = \frac{n(n-1)}{(p+1)^2}\mathrm{I}_{n-2,p} = \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^n}\mathrm{I}_{0,p} = \boxed{\frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}}.$$

On démontrerait le résultat par récurrence sur n.

Exercice 5. *Mines-Télécom 23.* **1.** Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

Correction

Quand t tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{t} \to 0$. De plus, $\operatorname{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$. On en déduit donc que

$$\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Donc $\dfrac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3t^3}$.

2. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Comme $f(t) = \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$, qui est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

Pour la calculer, on sait déjà qu'on ne peut pas séparer directement les deux morceaux, car les deux intégrales ne convergent pas a priori. Deux possibilités : s'arrêter jusqu'à un certain x, ou bien utiliser une des deux techniques classiques (IPP/cdv). Vu qu'il y a $1/t$ que l'on sait facilement intégrer, on va essayer en s'arrêtant jusqu'à un certain x. Soit $x > 1$. Alors

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

La première intégrale vaut $\ln(x)$. Pour la seconde, on fait une intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v(t) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$, $v'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[t\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1^x + \int_1^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(2)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)dt &= \ln(x) - x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(2)\right) \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Mais $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, $x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} - 1}.$$

Exercice 6. *Mines-Télécom 22*. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ puis étudier celle de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x}\, dx$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Attention à bien lire les questions ! On ne demande pas le calcul des intégrales, juste la convergence ! On note $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)}$.

Première intégrale Comme $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} x$, l'intégrale est faussement impropre en 0, car l'intégrande est prolongeable par continuité. Ensuite, pour étudier l'intégrale en $+\infty$, on fixe $y > 1$ et on considère $\displaystyle\int_1^y \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$. Pour étudier cette intégrale, on fait une intégration par parties, en posant $u(x) = -\cos(x)$, $u'(x) = \sin(x)$, $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $v'(x) = \dfrac{1}{2x^{3/2}}$. On obtient alors

$$\int_1^y \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^y + \int_1^y \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}} dx.$$

Or, $\dfrac{\cos(y)}{\sqrt{y}} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left|\dfrac{\cos(x)}{2x^3/2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2x^{3/2}}$, intégrable (intégrale de Riemann), donc, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^y \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}}$ converge absolument.
On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_1^y \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

Deuxième intégrale En 0, le même raisonnement que précédemment montre que g est prolongeable par continuité en 0 et que l'intégrale est donc faussement impropre. *Commentaire : on a envie de dire $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$, donc c'est gagné ! Eh bah perdu !* On fait un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)} &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} f(x) + \frac{\sin(x)^2}{x} + o\left(\frac{\sin(x)^2}{x}\right).
\end{aligned}$$

Or, on a vu (dans le cours !) que $x \mapsto \dfrac{\sin(x)^2}{x}$ n'était pas intégrable **et positive**, donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^y g(x) - f(x) dx$ n'est pas convergente. Comme $\displaystyle\int_1^y f(x) dx$ converge, on en déduit, enfin, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)$ n'est pas convergente.

Exercice 7. *CCINP 23.* **1.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_a^b f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

Correction

C'est le lemme de Riemann-Lebesgue : un grand classique ! Effectuons une intégration par parties, en dérivat $x \mapsto f(x)$ et en primitivant $x \mapsto \sin(nx)$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[-\frac{f(x)\cos(nx)}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx \\ &= \frac{f(a)\cos(na)}{n} - \frac{f(b)\cos(nb)}{n} + \int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx.\end{aligned}$$

Or,

$$\left|\frac{f(a)\cos(na)}{n}\right| \leqslant \frac{|f(a)|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par encadrement, $\dfrac{f(a)\cos(na)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même, $\dfrac{f(b)\cos(nb)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right| &\leqslant \int_a^b \left|f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right| dx \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement, donc $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I est bien convergente.

Correction

Déjà vu dans le cours (mais c'est important !).

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x}\, \mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = \mathrm{I}$.

Correction

Effectuons le changement de variables $u = nx$. *Comme ce changement de variables est affine, on ne le détaille pas !*

$$K_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

Ainsi, comme I est bien convergente, $K_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{I}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, \mathrm{d}x$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$.

Correction

On remarque que

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) f(x) dx,$$

où $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$. Il reste à démontrer que f est bien de classe $\mathscr{C}^1$.

- déjà, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est bien prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.
- ensuite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} \\ &= -\frac{\sin(x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2\sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

  Donc, par le théorème du prolongement de la classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Le théorème de la question précédente peut donc être appliqué, et on conclut alors que $J_n - K_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Correction

Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} J_{2p+1} - J_{2p-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p-1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x) - \sin((2p-1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2px)\sin(x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2px) dx = 2\left[\frac{\sin(2px)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc $J_{2p+1} = J_{2p-1}$ donc, par récurrence immédiate, $J_{2p+1} = J_1 = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout x.

Ainsi,

$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{p\to+\infty} J_{2p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8. *CCINP 2023*. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{nt}}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{nt}}{\mathrm{e}^{(n+1)t}} \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

qui est positive et dont l'intégrale converge. Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2. Montrer que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

On va faire une intégration par parties. On pose $u(t) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^n}$ donc $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^{n+1}}$, puis $v(t) = \mathrm{e}^{(n-1)t}$ donc $v'(t) = (n-1)\mathrm{e}^{(n-1)t}$. Le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge bien donc, comme I_n converge, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt \\
&= \left[-\frac{1}{n}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^n}\mathrm{e}^{(n-1)t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^n}\mathrm{e}^{(n-1)t}dt \\
&= \frac{1}{n.2^n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

On pose $J_n = n\mathrm{I}_n$ pour tout entier n.

3. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression de J_n, puis montrer que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

On remarque que pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$J_n = \frac{1}{2^n} + (n-1)\mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{2^n} + J_{n-1}.$$

On conclut alors que
$$J_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} + J_1.$$
Mais $J_1 = \mathrm{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Donc
$$J_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \textit{ (Somme des termes d'une suite géométrique)}$$
L'expression de I_n s'en déduit immédiatement.

Exercice 9. *Centrale 23*.
Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soit convergente. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

Correction

ATTENTION ! La fonction f n'est **PAS** *positive. C'est ça la difficulté essentielle ! Il faut ruser.*
Soit F une primitive de f. On sait que F possède une limite finie en $+\infty$ par convergence de l'intégrale. Soit $\alpha > 0$. Dans $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t$, on pose $u(t) = F(t)$ donc $u'(t) = f(t)$, puis $v(t) = \frac{1}{t^a}$ donc $v'(t) = \frac{-a}{t^{a+1}}$. Or,

- $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}$ converge car F converge et $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ aussi.
- $-a\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}} dt$ converge : la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$, possède une limite finie en $+\infty$, donc est bornée au voisinage de $+\infty$. (en fait on peut même démontrer qu'elle est bornée sur tout $\mathbb{R}_+$: exercice ?). Donc $\frac{F(t)}{t^{a+1}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$. Or, $\frac{1}{t^{a+1}}$ est intégrable en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}} dt$ est convergente.

Donc, par théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} dt$ converge.

Exercice 10. *Mines-Ponts 19, Centrale 17*. Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Correction

On note $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue en x, donc g est bien définie en x. Ensuite, $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, fonction d'intégrale en $+\infty$ convergente. Donc, par théorème de comparaison, f est bien définie.

Soit désormais G une primitive de g. Par convergence de l'intégrale, G admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = \ell - G(x)$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -g(x)$.

2. Montrer que $\dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

Correction

C'est une question à laquelle on aurait pu répondre à l'exercice précédent. Notons h : $t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$.

- $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc h est prolongeable par continuité en 0,
- Par majoration, $|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme h est continue, h est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrons-le.
Déjà, $|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on dispose de $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, $|h(t)| \leqslant 1$.
De plus, $|h|$ est continue sur le segment $[0, T]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, $|h|$ est majorée sur $[0, T]$, par $M > 0$.
Sur $\mathbb{R}_+$, $|h|$ est donc majorée par $\max(M, 1)$ donc h est bornée.

Ensuite, la question est vraiment + délicate en 0. On remarque que $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$. *On a donc envie de remplacer* $\dfrac{\sin(t)}{t^2}$ *par* $\dfrac{1}{t}$*, mais juste au voisinage de 0 ! ! Voilà pourquoi on fait tout le découpage qui va venir ensuite.*
On écrit que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\
&= \int_x^1 \frac{\sin(t) - t + t}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\
&= \int_x^1 h(t) dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\
&= -\ln(x) + \int_x^1 h(t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

Or, $|h|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, par, disons M, donc

$$\left| \int_x^1 h(t) dt \right| \leqslant M$$

Ainsi, $f(x) = -\ln(x) + k(x)$ où k est bornée, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

3. Montrer que $f(x)$ est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction

On étudier $x^2 f(x)$ et on montre que cette quantité tend vers 0 en $+\infty$. On calcule

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \\ &= x \int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2} du. \end{aligned}$$

Et là, on pense au lemme de Riemann-Lebesgue ! On fait une intégration par parties, en primitivant $\sin(ux)$ et en dérivant $\frac{1}{u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2} du &= x \left[\frac{-\cos(ux)}{xu^2}\right]_1^{+\infty} - 2x \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{xu^3} du \\ &= \cos(x) - 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3} du. \end{aligned}$$

L'intégration par parties était bien licite car les crochets étaient convergents. Or,

$$\begin{aligned} \left|\cos(x) - 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3} du\right| &\leqslant |\cos(x)| + 2 \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(ux)}{u^3}\right| du \\ &\leqslant 1 + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3} du. \end{aligned}$$

Donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; puis établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$.

Correction

On sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$, de signe constant et dont l'intégrale converge en 0, et $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc, par comparaison, l'intégrale de f converge en $+\infty$.

Ensuite, pour calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f$, on va faire une intégration par parties, en dérivant f et en intégrant 1, ce qui est licite car on sait que $[xf(x)]_0^{+\infty}$ converge grâce à l'asymptotique que nous avons faite sur f. On écrit donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= [xf(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \frac{-\sin(x)}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Exercice 11. *Mines-Ponts 19*.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Convergence et calcul de $\mathrm{I}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}xy)}\mathrm{d}x$.

Correction

Là, il faut distinguer la convergence (qui est facile) du calcul (qui a l'air vraiment plus délicat à première vue !) Attention à toujours garder des quantités qui sont intégrables.

Convergence On remarque que

$$\left|\frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}xy)}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ tout entier (continue sur $\mathbb{R}$, équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$).

Calcul *On se dit qu'il doit y avoir quelque chose d'un peu astucieux pour se débarrasser des complexes.* On remarque qu'en faisant le changement de variables $u = -x$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}xy)}\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1-\mathrm{i}uy)}(-\mathrm{d}u)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)(1-\mathrm{i}uy)}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}2\mathrm{I}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+\mathrm{i}xy)}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1-\mathrm{i}xy)}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\left(\frac{1}{1+ixy} + \frac{1}{1-ixy}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}\frac{2}{1+x^2y^2}dx.\end{aligned}$$

Or, en cherchant a et b vérifiant

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{1+x^2y^2},$$

on trouve $a = \dfrac{1}{1-y^2}$ et $b = -\dfrac{y^2}{1-y^2}$.

Remarque : attention ! A priori, on ne sait pas s'il existe de tels a et b. La théorie nous dit juste qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ vérifiant

$$\frac{2}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} = \frac{\alpha+\beta x}{1+x^2} + \frac{\gamma+\delta x}{1+x^2y^2}.$$

Bref, on en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(y) &= a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} + b\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2y^2}\\
&= a[\mathrm{Arctan}(x)]_{-\infty}^{+\infty} + b\left[\frac{1}{y}\mathrm{Arctan}(xy)\right]_{-\infty}^{+\infty}\\
&= a\pi + \frac{b\pi}{y}\\
&= \frac{\pi-\pi y}{1-y^2} = \frac{\pi}{1+y}.
\end{aligned}$$

Exercice 12. *Mines-Ponts 22*. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = f(n) - \int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t$.

Correction

Partons de l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t$. Dans cette intégrale, faisons une intégration par parties, en posant $u(t) = f(t)$, donc $u'(t) = f'(t)$, et $v(t) = t-n-1$ donc $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien $\mathscr{C}^1$, donc

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t &= [f(t)(t-n-1)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\\
&= f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité à établir.

2. On suppose que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\\
&= \int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|(t-k-1)f'(t)\right|dt\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|f'(t)\right|dt \text{ car sur } [k,k+1],\ |t-k-1|\leqslant 1\\ &\leqslant \int_1^n |f'(t)|dt.\end{aligned}$$

Comme f' est intégrable, la série de terme général $\displaystyle\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt$ est absolument convergente, donc convergente. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, on a bien équivalence entre la convergence de la série de terme général $f(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{n+1}f(t)dt$.

3. Application à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ pour $a>\dfrac{1}{2}$.

Correction

Dans cet exemple précis, $f(t)=\dfrac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}$, et $f'(t)=\dfrac{\frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}t^a+a\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{a+1}}}{t^{2a}}$. On a alors, très grossièrement, $|f'(t)|\leqslant\dfrac{1}{t^{a+1/2}}$ sur $[1,+\infty[$, qui est bien intégrable. Ainsi, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ équivaut à celle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}dt$. Pour déterminer la convergence de cette intégrale, on peut faire une intégration par parties. *La première fois que j'ai fait cet exercice, j'ai voulu intégrer le* $1/t^a$ *et dériver le* cos *: ça ne marche pas !* On pose $u(t)=2\sin(\sqrt{t})$, donc $u'(t)=\dfrac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $v(t)=\dfrac{1}{t^{a-1/2}}$, donc $v'(t)=\dfrac{\frac{1}{2}-a}{t^{a+\frac{1}{2}}}$. Or, le crochet

$$\left[\sin(\sqrt{t})\frac{1}{t^{a-1/2}}\right]_1^{+\infty}$$

converge, donc les intégrales $\mathrm{I}_1=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}dt$ et

$$\mathrm{I}_2=\int_1^{+\infty}2\sin(\sqrt{t})\frac{\frac{1}{2}-a}{t^{a+\frac{1}{2}}}dt$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

sont de même nature. Mais on remarque que

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{a+1/2}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{a+1/2}},$$

qui est intégrable (intégrale de Riemann). Par théorème de comparaison, on en déduit que I_2 converge, donc I_1 converge, donc la série de terme général $\left(\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n^a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.