- **exercice 9 :**

f est continue sur $[1, +\infty[$; $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.

Montrons que $\forall \alpha > 0, \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt = I$ converge.

- IPP :

on pose $\forall t \in [1, +\infty[$ $\quad u(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

$u'(t) = -\alpha \frac{1}{t^{\alpha+1}}$.

Soit F une primitive de f, on pose $v'(t) = f(t)$ et $v(t) = F(t)$.

Sous réserve de convergence,

$$I = \left[\frac{F(t)}{t^\alpha} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} F(x) dx.$$

- Or $\int_1^{+\infty} f$ converge, donc $\exists l \in \mathbb{R}, / F(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} l$.

Donc $\frac{F(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Donc le crochet converge.

- Notons $g : x \longmapsto \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} F(x)$, continue sur $[1, +\infty[$.
  - en $+\infty$:

Si $l \neq 0$: $\quad g \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha l}{x^{\alpha+1}}$, car $\alpha + 1 > 1$.

Donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, g est intégrable en $+\infty$.

Donc $\int_1^{+\infty} g$ converge, donc $\boxed{I \text{ converge}}$.

Si $l = 0$: $\quad g(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)$. On conclut de même.

- **exercice 12 :**

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_n^{n+1} 1 \times f(t) dt.$$

On pose : $\quad u(t) = f(t) \qquad u'(t) = f'(t)$

$v(t) = 1 \qquad v'(t) = t - n - 1$

Par IPP,

$$I_n = \left[f(t)(t-n-1) \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t)(t-n-1) dt$$

$$\boxed{I_n = f(n) - \int_n^{n+1} f'(t)(t-n-1) dt}.$$

⚠ erreur de signe dans l'énoncé.

2) Supposons que $\sum f(n)$ converge. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors par **1)**,

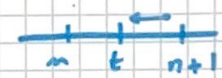
$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} f(N) - \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} (t-n-1) f'(t)\,dt$$

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} (t-n-1)\, f'(t)\,dt.$$

Il nous reste donc à démontrer que la stg $u_n = \int_n^{n+1} (t-n-1) f'(t)\,dt$ converge.

$$|u_n| = \left| \int_n^{n+1} (t-n-1) f'(t)\,dt \right| \leq \int_n^{n+1} \left| (t-n-1) f'(t) \right| dt.$$

Or $\forall t \in [n, n+1]$, $|t-n-1| \leq 1$



Donc $|u_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$

Or f' est intégrable donc $\int_1^{N} |f'(t)|\,dt$ converge, donc la stg $\int_n^{n+1} |f'(t)|\,dt$ converge, ainsi par comparaison, la stg u_n converge absolument donc $\boxed{\text{converge}}$.

3) Soit $f : x \longmapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^a}$ où $a > \frac{1}{2}$.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})\, x^{-a}}_{A} \underbrace{- a x^{-a-1} \cos(\sqrt{x})}_{B}$$

On a $|A| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}\, x^a}$ et $|B| \leq \frac{a}{x^{a+1}}$

Or $a + \frac{1}{2} > 1$, donc par comparaison à une fonction intégrable, $|f'|$ est intégrable.

Par **2)**, il faut démontrer la convergence de $\underbrace{\int_1^n f(t)\,dt}_{I_n} = \int_1^n \frac{\cos\sqrt{t}}{t^a}\,dt$.

$$= \int_1^n \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{t^{a-1/2}}\,dt$$

On pose $\forall t \in [1, n]$,

$u'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ $\qquad u(t) = 2\sin(\sqrt{t})$

$v(t) = \frac{1}{t^{a-1/2}}$ $\qquad v'(t) = -\frac{a-1/2}{t^{a+1/2}}$.

Par IPP,

$$I_n = \left[\frac{2\sin(\sqrt{t})}{t^{a-1/2}} \right]_1^n + \int_1^n \frac{(2a-1)\sin(\sqrt{t})}{t^{a+1/2}}\,dt$$

$$= \frac{2\sin\sqrt{n}}{n^{a-1/2}} - \frac{2\sin(1)}{1} + \int_1^n \frac{(2a-1)\sin\sqrt{t}}{t^{a+1/2}}\,dt.$$

Or $\left| \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{a-1/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{a-1/2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $\left| \frac{\sin\sqrt{t}}{t^{a+1/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{a+1/2}}$, intégrable car $a + \frac{1}{2} > 1$

Donc $\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{a+1/2}}$ est intégrable, donc son intégrale converge, d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n^a} \text{ converge}}$

autre manière d'aborder $I_n = \int_1^n \frac{\cos\sqrt{t}}{t^a}\,dt$:

Changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$ $\quad dt = 2u\,du$

$$\int_1^n \frac{\cos(u)}{u^{2a}} \times 2u\,du = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{2\cos(u)}{u^{2a-1}}\,du \qquad (2a > 1)$$

Puis IPP (en intégrant cos).

rédaction du chg^t de var :

On pose $\varphi : \begin{array}{l} [0, n] \longrightarrow [0, \sqrt{n}] \\ t \longmapsto \sqrt{t} \end{array}$. $\qquad \varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

φ est une bijection C^1, donc

$$\int^n \frac{\cos\sqrt{t}}{t^a}\,dt = 2\int^n \frac{\cos(\varphi(t))}{t^{a-1/2}} \times \varphi'(t)\,dt$$

$$= 2\int^n \frac{\cos(\varphi(t))}{\varphi(t)^{2a-1}}\,\varphi'(t)\,dt$$

car $t^{a-\frac{1}{2}} = ((\sqrt{t})^2)^{a-\frac{1}{2}}$

$t^a = (\sqrt{t})^{2a}$