(10) TD01 - 10/09/2024

1) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$

→ Montrons que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) DÉFINITION

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$

- g est continue sur $[x, +\infty[$
- En $+\infty$: $\forall t \in [x, +\infty[$ $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ or $\dfrac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1[x, +\infty[$ car $2 > 1$

Par théorème de comparaison (termes ≥ 0) (intégrale de Riemann)

$\int g$ converge

et f est bien définie.

b) DÉRIVABILITÉ

On note G une primitive de g sur $[x, +\infty[$.

⚠ ne pas écrire $f(x) = G(N) - G(x)$ car N est une constante

$$f(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\,dt = \left[G(t) \right]_x^{+\infty} = l - G(x)$$

↳ convergence d'une $\int$ équivalent à la limite de sa primitive

(où $l = \lim\limits_{t \to +\infty} G(t)$,

l existe car $\int g$ converge)

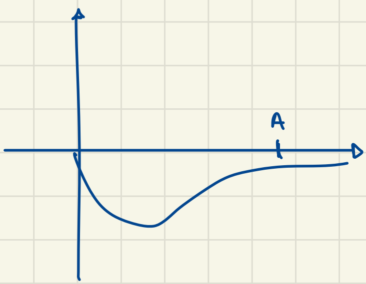
Or G est dérivable, donc f est dérivable : $f'(x) = -G'(x) = -g(x)$

2) Montrons $t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$

- $\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} \dfrac{t - \frac{t^3}{6} - t + o(t^3)}{t^2} \underset{t \to 0}{=} -\dfrac{t}{6} + o(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

- $\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

- φ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$



- Mq φ bornée :

  - $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc $\exists A > 0$, tq $\forall t \geq A$, $|\varphi(t)| \leq 1$

  - φ est continue sur le segment $[0, A]$, donc bornée sur $[0, A]$:

Th. Bornes Att.

on dispose de $M > 0$ tq $\forall t \in [0, A]$, $|\varphi(t)| \leq M$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi(t)| \leq \max(1, M)$

- $\underset{0}{\sim}$ de f ? → Idée : en 0, $\dfrac{\sin(t)}{t^2}$ ressemble à $\dfrac{1}{t}$:

on veut remplacer l'intégrande par $\frac{1}{t}$.

On écrit : $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt}$

car cv

$f(1)$ et cste (indép de x)

On : $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt = \int_x^1 \frac{1}{t} \underbrace{- \frac{1}{t} + \frac{\sin(t)}{t^2}}_{\varphi(t)}\,dt$

$$= \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_x^1 \varphi(t)\,dt$$

on peut découper car $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t}$ existe $\boxed{\text{et}}$ $\varphi(t)$ est continue en 0

$= -\ln(x) + \displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,dt$ or φ est prolongeable par continuité en 0, donc

$\displaystyle\int_x^1 \varphi \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 \varphi$ constante (indép. de x)

→ Donc, comme $-\ln(x) + f(1) + \displaystyle\int_0^1 \varphi \underset{x \to 0}{=} o(-\ln(x))$

$$\underline{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)}$$

3) Mq $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$ donc $x^2 f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{x^2 \sin(t)}{t^2}\,dt$

$$= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt$$

par changement de variable $u = \frac{t}{x}$: $= x \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2}\,du$

cf. Riemann-Lebesgue de (ex. 7)

On pose par IPP : $v(u) = \dfrac{-\cos(ux)}{x}$ $\quad v'(u) = \sin(ux)$

$w(u) = \dfrac{1}{u^2}$ $\quad w'(u) = \dfrac{-2}{u^3}$

or $v(u)w(u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ donc $\left[v(u)w(u)\right]_1^{+\infty}$ converge.

d'où $x^2 f(x) = x\left[-\dfrac{\cos(ux)}{x} \times \dfrac{1}{u^2}\right]_1^{\infty} - x\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(ux)}{x} \times \dfrac{2}{u^3}\,du$

$$= +\cos(x) - 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3}\,du$$

Alors $\left|x^2 f(x)\right| \leq 1 + 2\left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(ux)}{u^3}\,du\right|$

$$\leq 1 + 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}\,du \quad \text{bornée}$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

4) Intégrabilité 2) et 3)

Calcul : IPP $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{1} \times \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{f}\,du$