DM 01
à rendre au plus tard le mercredi 11 septembre

Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x$ est convergente.

Correction

Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Alors

- f est continue sur $[0, +\infty[$,
- $x^2 f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, qui est intégrable en $+\infty$. Par comparaison, f aussi.

Ainsi, I converge.

2. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(-t^2\right)$.

Correction

La fonction $x \mapsto \ln$ est concave, la tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 a pour équation $y = x$, d'où l'inégalité désirée.
Un étude de fonctions aurait pu aussi fonctionner. On en déduit alors que

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\left(n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\left(n\times -\frac{t^2}{n}\right)} \leqslant \exp\left(-t^2\right)$$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \exp\left(-t^2\right) \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0, \sqrt{n}]$. Alors

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{n\frac{t^2}{n}} \text{ par l'inégalité } \ln(1+x) \leqslant x \text{ valable pour tout réel } x > -1 \\ &\leqslant \mathrm{e}^{t^2}.\end{aligned}$$

En passant à l'inverse, on a l'inégalité désirée.

On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

4. Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction $t \mapsto \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- De plus, on a l'équivalent $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{t^{2n}}$. Or, $n \geqslant 1$ donc $2n \geqslant 2$, donc $\dfrac{n^n}{t^{2n}}$ est intégrable en $+\infty$, donc $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ aussi.

L'intégrale v_n converge donc.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \mathrm{I}_n$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ par l'inégalité de la question 1 et intégration des inégalités.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_n \leqslant \mathrm{I}_n}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t,$$

toujours par intégration des inégalités.

7. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant v_n$.

Correction

Par positivité de l'intégrande,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = v_n.$$

On en déduit que $\boxed{u_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant v_n.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x$. On admet le résultat : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

8. À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n}\sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

Correction

On pose

$$\varphi_1 : \left| \begin{array}{l} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0, \sqrt{n}] \\ \qquad x \mapsto \sqrt{n}\sin(x) \end{array} \right. .$$

La fonction φ_1 est une bijection strictement croissante donc par la formule de changement de variables,

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(x)^2)^n \cos(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\varphi_1(x)^2}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi_1'(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n du \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u_n = \sqrt{n} a_{2n+1}}$

9. En posant $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n}\tan x$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sqrt{n} a_{2n-2}$.

Correction

On pose

$$\varphi_2 : \left| \begin{array}{l} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0, +\infty[\\ \qquad x \mapsto \sqrt{n}\tan(x) \end{array} \right. .$$

La fonction φ_2 est une bijection strictement croissante, de dérivée

$$\sqrt{n}(1 + \tan^2(x)) = \frac{\sqrt{n}}{\cos^2(x)},$$

donc par la formule de changement de variables,

$$\begin{aligned}
a_{2n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(x)\right)^n \frac{1}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\tan^2(x)\right)^{-n} \frac{1}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{\varphi_2(x)^2}{n}\right)^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi_2'(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \frac{v_n}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

10. En déduire la valeur de I.

Correction

On fait du calcul asymptotique :

$$u_n = \sqrt{n}a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\pi}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même,

$$v_n = \sqrt{n}a_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\pi}{2(2n-2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Deux autres intégrales « à la Gauss »

11. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x$. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n. En déduire la valeur de I_n.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque déjà que $x \mapsto x^n \exp\left(-x^2\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que

$$x^2 x^n \exp\left(-x^2\right) = (x^2)^{1+\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $x^n \exp\left(-x^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui est intégrable en $+\infty$, donc $x \mapsto x^n \exp\left(-x^2\right)$ est intégrable en $+\infty$, donc I_n converge.
Ensuite, on fait une IPP, en intégrant x^n en $f : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et en dérivant $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

en $-2xe^{-x^2}$. Comme $f(x)g(x)$ admet des limites finies en 0 et en $+\infty$ (par croissances comparées), on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}2xe^{-x^2}\,dx\\ &\boxed{= \frac{2}{n+1}\mathrm{I}_{n+2}.}\end{aligned}$$

On en déduit que, $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}\mathrm{I}_n$, donc, si $n \in \mathbb{N}$, par récurrence immédiate,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{2n} &= \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\dots\frac{1}{2}\mathrm{I}_0\\ &= \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)\dots 2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ &\boxed{= \frac{(2n)!}{4^{n+1}n!}\sqrt{\pi}.}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{2n+1} &= \frac{2n}{2}\frac{2n-2}{2}\dots\frac{2}{2}\mathrm{I}_1\\ &= n!\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx\\ &= n!\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\\ &\boxed{= \frac{n!}{2}.}\end{aligned}$$

12. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ on pose : $J_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx$.

(a) Après avoir justifié son existence, montrer que : $J_a = \displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx$.

Correction

On note $f : x \mapsto \exp\left(-\left(x^2 + \dfrac{a^2}{x^2}\right)\right)$.

- Déjà, f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Ensuite, $-\left(x^2 + \dfrac{a^2}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
- Enfin,

$$x^2 f(x) = x^2 e^{-x^2} e^{-a^2/x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ par croissances comparées.}$$

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui est intégrable en $+\infty$, donc f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, J_a existe bien. On écrit alors que

$$J_a = \int_0^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right) dx + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right).$$

Dans la première intégrale (notons-la K_a), effectuons le changement de variables $u = \frac{a}{t}$. On note

$$\varphi : \left| \begin{array}{c}]\sqrt{a}, +\infty[\to]0, \sqrt{a}[\\ u \mapsto \frac{a}{u} \end{array} \right. .$$

Alors φ est une bijection $\mathscr{C}^1$ strictement décroissante et

$$\begin{aligned} K_a &= \int_{+\infty}^{\sqrt{a}} \exp\left(-\left(\left(\frac{a}{u}\right)^2+u^2\right)\right) \times \left(-\frac{a}{u^2}\right) du \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{a}{u^2} \exp\left(-\left(u^2+\frac{a^2}{u^2}\right)\right) du. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{a}{u^2} \exp\left(-\left(u^2+\frac{a^2}{u^2}\right)\right) du + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right) \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \left(1+\frac{a}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(b) En déduire, en posant $u = x - \frac{a}{x}$, la valeur de J_a.

Correction

On pose

$$\psi : \left| \begin{array}{c}]\sqrt{a}, +\infty[\to]0, +\infty[\\ x \mapsto x - \frac{a}{x} \end{array} \right. .$$

Alors ψ est une bijection strictement croissante, $\mathscr{C}^1$, et

$$\begin{aligned}
J_a &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \psi'(x) \exp\left(-\left(x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2} + 2a\right)\right) \\
&= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \psi'(x) \exp\left(-\varphi(x)^2 - 2a\right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-u^2 - 2a) du \\
&= \mathrm{e}^{-2a} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du \\
&\boxed{= \mathrm{e}^{-2a} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}
\end{aligned}$$